



MONOGRAPHIC SERIES  
VOLUME 6, ISSUE 2 - 2021

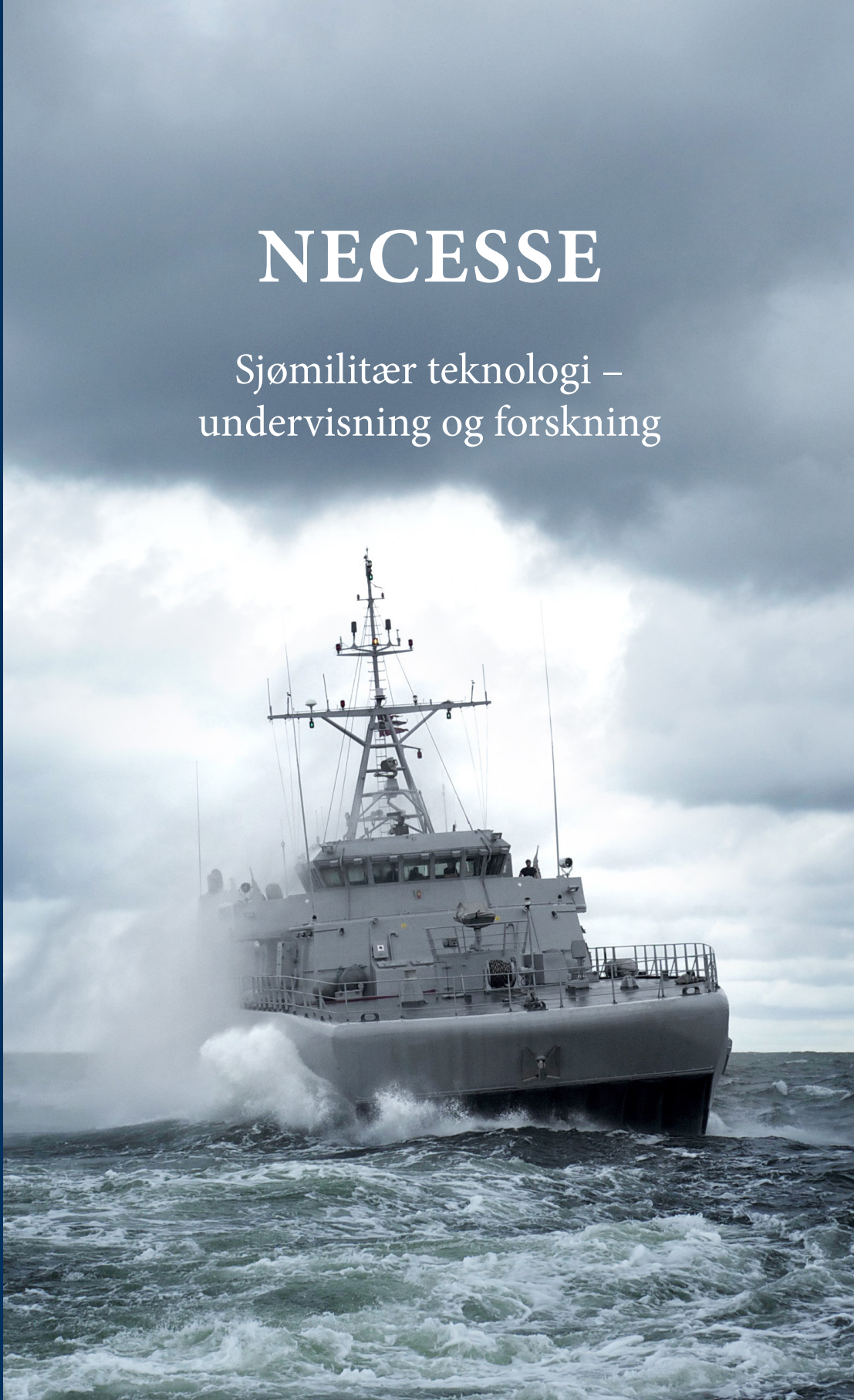
THE NORWEGIAN DEFENCE UNIVERSITY COLLEGE  
THE ROYAL NORWEGIAN NAVAL ACADEMY

NECESSE



# NECESSE

Sjømilitær teknologi –  
undervisning og forskning





# NECESSE

Sjømilitær teknologi –  
undervisning og forskning

**THE NORWEGIAN DEFENCE UNIVERSITY COLLEGE**  
THE ROYAL NORWEGIAN NAVAL ACADEMY

MONOGRAPHIC SERIES  
VOLUME 6, ISSUE 2 - 2021

Necesse kommer i flere utgivelser hvert år. Skriftserien har en eller flere fagredaktører for hver utgivelse, samt en ansvarlig hovedredaktør. Necesse publiserer artikler som belyser problemstillinger relevante for operativ virksomhet. Under hovedoverskriften sjømilitær profesjonskompetanse har vi en tverrfaglig tilnærming med fem sjømilitære fagfelt: militær logistikk, maritime operasjoner, maritim militær teknologi, sjømilitært lederskap og militær navigasjon. Alle synspunkter i denne publikasjon står for forfatterens egen regning. Hel eller delvis gjengivelse av innholdet kan bare skje med forfatterens samtykke.

Necesse publiserer faglige, populærvitenskapelige og vitenskapelige artikler og er godkjent som et tverrfaglig vitenskapelig tidsskrift på nivå 1 i publiseringssystemet. Retningslinjer som du må benytte hvis du ønsker å få publisert en faglig eller en vitenskapelig artikkel i Necesse, er tilgjengelig på [fhs.brage.unit.no](http://fhs.brage.unit.no) – Forsvarets høyskole. En vitenskapelig artikkel vil bli gjenstand for en dobbelt blind fagfelle-vurdering før den blir vurdert for utgivelse. Andre typer artikler som ikke skal vurderes opp mot nivå 1-kriteriene, vil bli vurdert og (eventuelt) godtatt av respektive fagredaktører. Necesse har et open access format, der denne og tidligere utgaver kan hentes på [fhs.brage.unit.no](http://fhs.brage.unit.no) – Forsvarets høyskole. Her vil også alle vitenskapelige artikler være søkbare og lagt ut som PDF-dokument.

*Stein Hatlem Forsdahl*  
*Hovedredaktør Necesse*

2021 © Sjøkrigsskolen  
PB 5 Haakonsværn, 5886 BERGEN

ISSN: 2535-2903  
ISBN: 978-82-93550-30-3 (elektronisk utgave)

Tittel: Necesse  
The Norwegian Defence University College  
The Royal Norwegian Naval Academy  
Monographic series  
Volume 6, Issue 2 - 2021  
Sjømilitær teknologi – undervisning og forskning

Hovedredaktør: Stein Hatlem Forsdahl  
Fagredaktører: Ellen Margit Krätzig-Berle, Arild Sæbø og Harald Totland  
Digital støtte: Kari Jensen  
Layout: Katrine Austgulen, HOS Grafisk  
Foto fremside: Minejaktfartøy av Oksøy-klassen, Forsvaret  
Foto bakside: [www.scotlandnow.dailyrecord.co.uk](http://www.scotlandnow.dailyrecord.co.uk)



# Andre utgivelser i skriftserien

---

<b>VOL. 1</b>	2016	Issue 1 Issue 2 Issue 3 Issue 4	Militær navigasjon – effektiv og troverdig Realfag og teknologi for marineoffiseren Mer for mindre Endring = ledelse + verdsetting
<hr/>			
<b>VOL. 2</b>	2017	Issue 1 Issue 2 Issue 3	Militær navigasjon – dagens teknologi for morgendagens krigføring Sjømakt og sjømilitær utdanning Realfag og teknologi for marineoffiseren
<hr/>			
<b>VOL. 3</b>	2018	Issue 1 Issue 2	God når det gjelder? Søken etter nye svar på gamle spørsmål Militær navigasjon – teknologi og operative team
<hr/>			
<b>VOL. 4</b>	2019	Issue 1	Militær navigasjon – navigatøren i fokus
<hr/>			
<b>VOL. 5</b>	2020	Issue 1 Issue 2 Issue 3	Sjømilitær utvikling i Russland og Kina. Grunnlag for bekymring? Koronafronten Militær logistikk i et åpent systemperspektiv
<hr/>			
<b>VOL. 6</b>	2021	Issue 1	Utvikling og vekst

---

# Innhold

- 
- 6–7 Ord fra sjef Sjøkrigsskolen  
Kommandørkaptein Sigvard Sandvik
- 9 Forord  
Ellen Margit Krätzig-Berle, Arild Sæbø og Harald Totland
- 

## 1.

### **NYE UNDERVISNINGSMETODER OG DIGITALE HJELPEMIDLER**

- 12–16 Forelesningen – 700 år og fremdeles i live  
Terje Fykse
- 17–27 Teambasert læring og digital undervisning i  
teknologiske emner  
Arild Sæbø
- 28–33 Tavleløs undervisning i matematikk – omvendt  
klasserom og teambasert læring  
Ellen Berle
- 34–42 Erfaringar frå digital undervisning av Sensorsystemer  
for Navigasjonslinja på Sjøkrigsskolen  
Linn-Kristine Glesnes Gaupholm

- 43–50 Ballistikk på Sjøkrigsskolen fra 2012 til 2018 – hvordan og hvorfor  
Harald Totland og Christophe Massacand
- 51–57 NUSSE, EMMA, FREDERIC og GIER, oldefedrene til PC-en din  
Ellen Berle
- 

## 2.

### SANNSYNLIGHETSREGNING OG TEKNOLOGI

- 60–73 En introduksjon til sjøminenes matematikk  
Knut Meen
- 74–82 En oppskrift for å teste om forventningsverdier og varianser er like, i to serier med uavhengige normalfordelte observasjoner, ved simuleringer  
Knut Meen
- 

## 3.

### VITENSKAPELIGE ARTIKLER

Fagfellevurdert til nivå 1

- 86–101 Banana Distributions Based on Stochastic Polar Coordinates  
Tore Langholm and Harald Totland  
*Peer-reviewed article*
- 

- 104–107 Seksjon for sjømilitær teknologi
-

---

# Ord fra sjef Sjøkrigsskolen

Kommandørkaptein Sigvard Sandvik



---

*Fotograf: Truls Løtvedt*

Kommandørkaptein Roar Espevik har vært grunnlegger og hovedredaktør av *Necesse* siden oppstart. Bakgrunnen for tidsskriftet var et ønske om å gjøre det enklere for ansatte å komme i gang med FoU. Nå, etter noen år, kan vi fastslå at dette var en svært god idé. FoU er satt på dagsorden, og de ansatte bidrar som aldri før. Det som i utgangspunktet skulle være et lavterskeltilbud, har på svært kort tid oppnådd en imponerende status. *Necesse* er godkjent som tverrfaglig vitenskapelig tidsskrift på nivå 1 i publiseringssystemet. Dette skyldes selvsagt kvalitet på bidragene, og det synliggjør også den høye kvaliteten på de ansatte ved skolen. Når Roar Espevik nå takker av i Forsvaret, håper vi at han fortsetter med FoU som kan publiseres i *Necesse*. FHS/SKSK takker KK Roar Espevik for innsatsen, og ønsker ham lykke til videre i ny og viktig jobb ved Forsvarshøgskolan i Sverige. Vi håper selvsagt på et godt samarbeid fremover. FHS/SKSK ønsker ny hovedredaktør, orlogskaptein Stein Forsdahl, lykke til med vervet som hovedredaktør.

Nå er et nytt nummer av *Necesse* klart. Denne gangen er det Seksjon for sjømilitær teknologi som har fått ansvaret for utgivelsen.

Mange hevder, etter mitt syn med rette, at vi nå er inne i en ny teknologisk revolusjon. Det krever mye å henge med på den teknologiske utviklingen som skjer. En enda større utfordring er å utnytte de muligheter som allerede er her, og de som kommer i tiden fremover. Covid-19 har gitt oss en god erfaring med hva som er mulig å få til. Uten teknologi, og høy kompetanse blant de ansatte, hadde vi aldri klart å gjennomføre utdanningsprogrammet under pandemien. Vi ble tvunget til å ta i bruk nye teknologiske muligheter, men vi hadde ikke tid til å vurdere de beste undervisningsmetodene med tilhørende digitale hjelpemidler. Der er vi nå. Vi kan se tilbake på erfaringer og evaluere hva som fungerte, og hva som ikke fungerte. Dette blir et svært viktig arbeid fremover, og denne utgaven av *Necesse* er et godt bidrag i så henseende.

FHS/SKSK vil ikke ha ressurser til å være oppdatert på alt. Vi må fokusere på det som blir viktig for oss, som er planlegging og gjennomføring av operasjoner. Vi må altså finne undervisningsmetoder og materiell for å bli best mulig på dette. Til det siste har skolen anskaffet en ny lab for å kunne gjennomføre omvendt klasseromsundervisning. Denne har allerede vært i bruk en god stund, men vi har ikke hatt mulighet til å gi den et offisielt navn på grunn av nedstengingen under koronapandemien. Nå skjer dette. Vi gleder oss til at tidligere forsvarssjef, admiral Torolf Rein, offisielt skal åpne «Admiral Torolf Reins laboratorium».

Takk til teknologiseksjonen for et nytt nummer. Jeg gleder meg til å lese dette og ønsker også alle andre god lesing.



Sigvard Sandvik  
Kommandørkaptein  
Fungerende Sjef FHS/Sjøkrigsskolen





# Forord

Denne utgaven av *Necesse* handler, som tittelen viser, om undervisning i sjømilitær teknologi og forskning innen det samme feltet, men også om bruk av teknologi til utvikling av undervisningen.

Nye muligheter velter inn i klasserommet, men uten et pedagogisk skjelett er de lite verdt. Vi setter fokus på den teknologiske endringen, som ofte innebærer at læringen foregår i det digitale rommet. Implementering av ny læringsteknologi krever at læreren utvikler sin pedagogiske praksis og at studentene endrer sin tilnærming til læring. Det er i dette nummeret vist hvordan omvendt klasserom, teambasert læring og digitalisering av undervisningen kan utnytte potensialet som ligger i den nye teknologien. Artikler som beskriver nyere undervisningsmetoder og erfaringer man har samlet, inkludert en artikkel som beskriver et tverrfaglig undervisningsopplegg, utgjør den første delen av heftet. Den avslutter med et lite tilbakeblikk på tiden da denne teknologiske utviklingen startet.

På Sjøkrigsskolen har vi et lite, men mangfoldig fagmiljø innen teknologiske emner, og dette fører blant annet til at det hvert år leveres gode bacheloroppgaver innen ingeniørfag. Sjøforsvaret er helt avhengig av at kadettene har et kunnskapsfundament som gjør dem i stand til å operere og drifte avanserte systemer om bord på Marinens fartøyer. Forskningsbasert undervisning bidrar til å øke kadettenes teknologiforståelse og evne til å løse oppgavene som venter etter endt utdanning. I andre og tredje del av dette nummeret viser vi noen av områdene det forskes på ved Seksjon for sjømilitær teknologi. De tre artiklene handler om bruk av sannsynlighetsregning, og den ene gir et innblikk i hvordan sannsynlighetsregning kan brukes innen minerydding. Den siste artikkelen har målfølgning som tema og er fagfellevurdert til nivå 1.

Ellen Margit Krätzig-Berle, Arild Sæbø og Harald Totland  
*Fagredaktører*

*Bergen, oktober 2021*



---

1.

Nye undervisningsmetoder  
og digitale hjælpemidler

---

---

# Forelesningen – 700 år og fremdeles i live

Terje Fykse

*Seksjon for sjømilitær teknologi, FHS Sjøkrigsskolen*

Vi bruker PowerPoint til det meste, og  
Internett er kommet for å bli. Hva ellers  
har skjedd de siste 700 årene?



Bildet er malt av Laurentius de Voltolina og viser en forelesning fra Universitetet i Bologna en gang på 1300-tallet. Scenen er ganske lik dagens virkelighet ved universiteter og høyskoler, riktignok før pandemien. Læreren messer på sitt, noen studenter følger med, pliktoppfyllende eller kanskje til og med interesserte. Noen er opptatt med hverandre, andre stirrer drømmende ut i luften, mens atter andre har gitt opp å skjule at de sover. Vi har altså ikke forandret oss stort de siste 700 årene.

Men mye rundt oss har endret seg. På 1300-tallet hadde de ikke engang trykte bøker. Studentene, de som fulgte med, skrev av det læreren sa og laget sine egne bøker. I dag kaller vi det notater, men hva er nytt? Det har jo faktisk kommet en rekke nyvinninger de siste 700 årene, som stensiler, overheadprojektor, video, PowerPoint og Internett! Men fremskrittet angår ikke alle. Innenfor klasserommets fire vegger rår vi lærere grunnen. Vi kan fremdeles stå i en krittsky mellom tavlen og kateteret og støve ned frivillig.

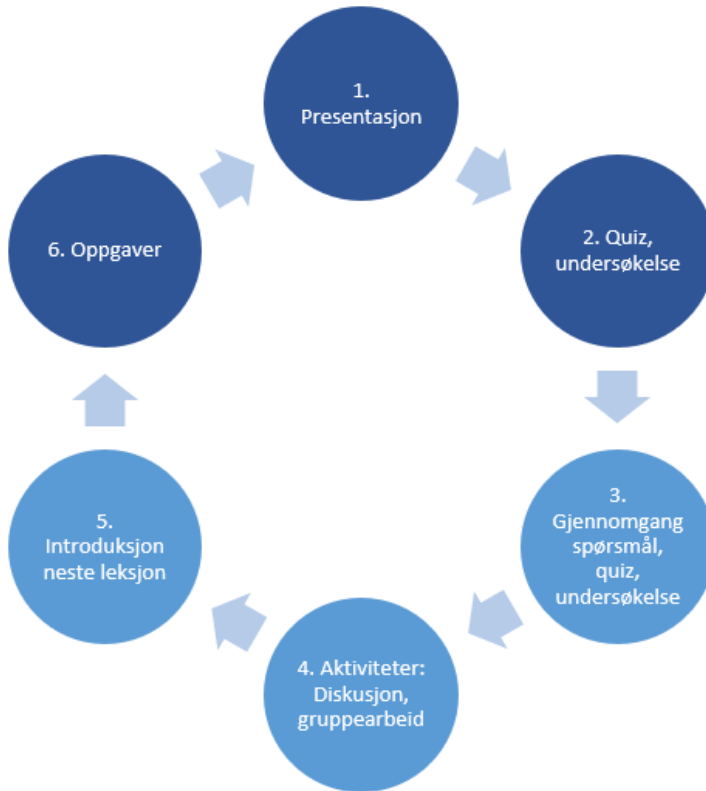
Forelesningen har overlevd fordi den er lettvinnt både for lærer og student: Vi lærere kan ta frem notatene fra i fjor og studentene kan troppe opp uforberedt. Vi hadde kanskje trengt et slikt lavterskeltilbud hvis forelesningene faktisk hadde en verdi. Men alt tyder på at innholdet i selv den den mest fengende og briljante forelesningen går til spille. Er læreren effektiv med svampen, kan alt bli fjernet før timen er over. Noe fester seg nok hos dyktige og motiverte studenter, men det meste er borte for alltid.

Under pandemien måtte vi lærere bruke nye verktøy for å nå studentene. Men når vi har lært oss Teams eller Zoom, gjør vi alt vi kan for å kopiere den gode, gamle forelesningen. Vi sender ut våre budskap i skyen og håper at noe blir snappet opp et sted. Kanskje alt dette nye får oss til å tenke litt: Hva om vi ikke når frem? Skulle vi kanskje bruke verktøyene til noe bedre? Merkelig nok har vi ikke tenkt så mye på om vi nådde frem før, men når vi sitter der i vår hjemmekontorstol og ikke hører en lyd fra skyen, begynner vi å gruble.

Heldigvis fins det dyktige lærere som viser vei og bruker moderne teknologi og metoder til å lage undervisningsopplegg nesten uten forelesninger. Stikkordene er bl.a. flipped classroom (omvendt klasserom) og TBL (teambasert læring). På Sjøkrigsskolen rakk noen av mine kolleger og deres studenter å ta i bruk vår nye TBL-lab før vi ble sendt hjem. Men undervisningen har fortsatt med samme opplegg på nett med meget bra resultater og tilbakemeldinger fra studentene. Gode undervisningsmetoder fungerer både i klasserom og på nett. Dårlige metoder blir bare verre online.

Hva skal til for å oppgradere møtet mellom lærer og kadett fra et uforpliktende lavterskeltilbud til en utbytterik læringsarena? Jeg har tidligere, også lenge før mars 2020, tatt til orde for å tenke i retning av omvendt klasserom. Det siste året har jeg kunnet eksperimentere med forskjellige verktøy og virkemidler. Kort fortalt kan erfaringene mine kokes ned til at enkle grep kan fungere like bra som mer avanserte metoder. Det gjenstår å undersøke disse grepene mer metodisk og vitenskapelig. Derfor legger jeg dem frem som egne erfaringer til diskusjon og videre undersøkelser.

Et omvendt-klasseromsforløp kan se slik ut:



Figur 1. Omvendt klasserom.

Her representerer de mørke boblene (1, 2 og 6) hjemmearbeid, mens de lyse (3, 4 og 5) representerer samlingene i klasserom. Den største forskjellen mellom den omvendte undervisningen og det tradisjonelle opplegget ligger i hvor presentasjonen av nytt stoff foregår. Figuren viser at nytt stoff her blir presentert før en møter i klasserommet. Hele idéen med omvendt klasserom er at det som tradisjonelt foregår i en forelesningstime like gjerne kan skje i forkant av samlingen, slik at studenten kan stille forberedt til timen og at man her kan utnytte tiden til bearbeiding av stoff som studenten allerede er kjent med.

Jeg skal gå kort gjennom hver av disse boblene og se på virkemidlene jeg har brukt:

## 1. PRESENTASJON

I omvendt undervisning blir nytt stoff gjerne presentert gjennom lærebøker eller i videoer, men jeg skriver vanligvis også en *studieveiledning*, som enkelt sagt var



undervisningen på skriftlig form. Studieveiledningen er ment som en overbygning som refererer til lærebøker og videoer og tar sikte på å forklare innholdet slik at det blir mulig for studentene å følge med uten en lærer. Videoene trenger ikke nødvendigvis å være egenproduserte, men som regel ender man opp med å lage videoene selv; da blir de spisset slik at de passer både til stoffet man holder på med, til emneplanen og til målgruppen. Produksjonsverktøyene gir mulighet for redigering, men finpuss og bearbeiding av vanlige skjermopptak er tidkrevende og ofte unødvendig.

Det har også kommet verktøy som gjør det mulig å gi oppgaver inne i selve videoene slik at de blir interaktive. Dette kan være et godt grep i omvendt undervisning, hvis lærer kan få automatisk genererte rapporter som viser hvilke deler av stoffet en må ta spesielt tak i på neste samling. Men man kan med fordel bruke enklere grep.

## 2. QUIZ OG UNDERSØKELSE

Denne boblen er forbindelsen mellom det kadettene gjør hjemme og samlingene i klasserom. Her har jeg prøvd å bruke grep som skal være engasjerende og samtidig gi et godt grunnlag for aktivitet i klasserommet. Det enkleste er å be kadettene stille spørsmål og komme med tilbakemeldinger mens de holder på å studere for seg selv, men jeg har etter hvert begynt å bruke verktøy som quiz og undersøkelser. Det er mer konkret og man kan sette tidsfrister, samt følge med på hvem som svarer. Men den største fordelen er at jeg som lærer kan ta ut rapporter som kan brukes direkte til forberedelse av undervisningen i klasserommet.

Typisk legger jeg ut en quiz 3-4 dager før samling, med innleveringsfrist dagen før vi treffes. Quizen har gjerne 6-8 spørsmål som utfordrer kadettens evne til å resonnerer rundt det aktuelle stoffet. Oppgavene er som regel av typen *flervalg* eller *flere svar*, hvor jeg unngår å stille reine faktaspørsmål, som bare kan slås opp. Kadettene får en automatisk vurdering i form av en poengscore. Selv om vurderingen ikke teller på mappekarakter, vil de fleste prøve å gjøre det så godt som mulig. Og et godt resultat forutsetter at jobben med å gå gjennom nytt stoff er gjort.

Spørsmålene har to hovedfunksjoner: De skal få studentene til å tenke samtidig som de skal danne en forbindelse til den påfølgende samlingen i klasserommet (som utgangspunkt for oppklaringer, nærmere forklaringer, diskusjon eller problemløsning). Jeg har ikke noen konkrete oppskrifter for hvordan man skriver slike spørsmål, men prøver hele tiden å tenke på at studentene skal *gruble* og ikke *google*.

Noen ganger bruker jeg *undersøkelse* i stedet for quiz. I undersøkelsen stiller jeg vanligvis kun ett åpent spørsmål for å få kadettene til å reflektere over stoffet og for å tenke gjennom hva de har lært og hva de mener vi bør diskutere nærmere i klasserommet.

Men som regel bruker jeg en undersøkelse med ett åpent spørsmål i *tillegg til* quizen. Spørsmålet blir da brukt til å avdekke om det er oppgaver (boble nr. 6) til den *forrige* leksjonen det er nødvendig å se nærmere på før vi går i gang med den siste leksjonen i timene, og kan ganske enkelt være slik: Er det noen oppgaver fra forrige leksjon du vil vi skal se nærmere på i timene? I tilfelle ja; hvilke og hvorfor? Undersøkelsen er obligatorisk og har en tidsfrist.

### 3. 4. SAMLING I KLASSEROM og 5.

Slik vi som lærere kjenner forelesningen fra vår egen studietid, er det foreleseren som har regien; både innhold og opplegg ellers er styrt fra tavlen. Noen ganger kommer det kanskje spørsmål fra klasserommet som naturligvis kan bidra til diskusjon og påvirke undervisningen. Men denne delen av undervisningen er ikke alltid så godt forberedt verken av lærer eller student, og blir gjerne litt tilfeldig. Disse diskusjonene er som regel nødvendige og bidrar til engasjement, men de er ikke alltid fruktbare og effektive og kan i verste fall gå ut over progresjonen i timene. Ideen i et omvendt klasserom-opplegg er å forberede timene i klasserom bedre, slik at både innhold og gjennomføring er planlagt og tenkt gjennom både av student og lærer.

I en slik time begynner jeg gjerne med å ta tak i undersøkelser som spør om oppgaver fra forrige leksjon. Noen ganger holder det med noen oppklaringer, mens vi andre ganger går gjennom en oppgave eller to.

Vanligvis vil jeg så gå gjennom nytt stoff med utgangspunkt i materialet som kadettene har vært gjennom på egen hånd i forkant. Reint praktisk tar jeg gjerne frem den skriftlige studieveiledningen fra boble nr. 1 i OneNote. Quizen i boble nr. 2 danner grunnlaget for gjennomgangen på den måten at jeg vektlegger stoff som jeg ser har vært vanskelig å forstå. I gjennomgangen noterer jeg direkte i OneNote og har noen ganger også tatt opp lyd synkront med notatene.

Hvis tiden tillater det, tar vi deretter gjerne quizen fra hjemmearbeidet (boble 2) på nytt. Forhåpentligvis blir resultatene bedre. Selv om det ikke skulle være tid til å ta quizen på nytt, vil jeg uansett gå gjennom den.

## 6. OPPGAVER

Hvis vi sammenligner de to forløpene for tradisjonell og omvendt undervisning, ser vi at de samles om et felles mål. De munner begge ut i at man skal kunne løse oppgaver. Å finne eller lage gode oppgaver, er krevende. Et passe vanskelig oppgavesett skal gi mestringsfølelse og dokumentere måloppnåelse iht. emneplan. I opplegget jeg har praktisert, bruker jeg også oppgavene som en bro mellom forrige leksjon og dagens tema og legger gjennomgang av oppgavene til starten av timen. Da forbereder jeg oppgaver basert på svarene på undersøkelsen i boble nr. 2.

I løpet av nedstengningene ble det stadig mer tydelig at både kadetter og lærere savnet hverdagen slik den var, med oppmøte i auditorier og klasserom, og daglige møter ansikt til ansikt. Da vi møttes igjen i klasserommet, var vi tilbake til praksis, veiledning, gruppearbeid, laboratorieøvelser og ledertrening på gamlemåten. Trivsel og psykisk helse krever at vi samarbeider med fysisk avstand som er mindre enn anbefalingene under pandemien. Men forelesningen i den formen vi ser i de Voltolinas bilde, kan gjerne dø ut sammen med viruset.

---

# Teambasert læring og digital undervisning i teknologiske emner

Arild Sæbø

*Seksjon for sjømilitær teknologi, FHS Sjøkrigsskolen*

Våren 2020 ble det tatt i bruk teambasert læring i emnet Skipselektriske anlegg ved Sjøkrigsskolen. En nøkkelfaktor for å lykkes med digitalisering av undervisningen er å ha en pedagogisk verktøykasse som er tilpasset de nye mulighetene. I denne artikkelen settes det søkelys på digitalisering og teambasert læring.

## INNLEDNING

Tradisjonell forelesning har vært den foretrukne undervisningsformen i teknologiske emner på Sjøkrigsskolen. Mange vil mene at dette er en lite aktiviserende undervisningsform og stammer fra en tid da det ikke fantes pensumlitteratur. Lærere har brukt mange år på å tenke på fag og utvikle seg som fagpersoner. Fra en lærers ståsted kan forelesning være en effektiv måte å formidle pensum på, men stimulerer ikke til dypere læring hos studentene (Raaheim, 2013). Det kreves mer av studentene enn å notere og lytte. Dypere læring forutsetter at studenten er aktiv i egen læringsprosess.

Det er en forventning på FHS at undervisningen skal digitaliseres, og mange lærere ved Sjøkrigsskolen har tatt i bruk nye digitale verktøy. Den digitale satsningen har vært en del av prosjektet «den digitale skole», som startet vinteren 2015. Dette har siden ført til en stor produksjon av digitalt innhold og gjort undervisningen mer tilgjengelig for kadettene (Sæbø, 2016). Mange lærere har likevel erfart at digitale læringsressurser alene ikke gir økt læring. Det er ikke nok å legge ut video og digitale ressurser uten en tilpasset pedagogisk tilnærming, struktur og rammer.

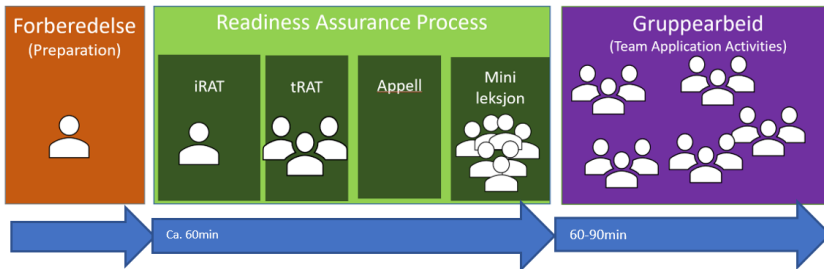
Teambasert læring (TBL) er en metode for å få til aktiv læring og stimulerer til læring som går i dybden. Det er en læringsform som tar utgangspunkt i at det meste av læringen foregår i grupper, med gjentakende sykluser. Metoden er godt egnet for å gjennomføre omvendt klasseromsundervisning. Dette gir læreren mulighet til å utnytte den digitale undervisningen og samtidig følge læringsprosessen til studentene. Studentene forbereder seg på egen hånd og jobber deretter sammen med oppgaver i grupper. Sammensetningen av gruppene er styrt av lærer. Det er viktig å skape velfungerende team som styrker læringsprosessen til studentene. Teamene er permanent gjennom hele semesteret. TBL gir læreren mer tid til å snakke med hvert team og enkeltstudenter (Michaelsen & Sweet, 2008).

Det blir her gjort rede for TBL som undervisningsform, i lys av mine erfaringer i emnet Skipselektriske anlegg (SEA). Det finnes lite litteratur og artikler som beskriver TBL brukt i teknologiske fag. Formålet med denne artikkelen, er å vise hvordan TBL kan fungere som undervisningsmetode i teknologiske emner. Semesteret startet med TBL i klasserommet, men måtte etter kort tid digitaliseres og overføres til Teams på grunn av koronapandemien.

## SYKLUSEN I TEAMBASERT LÆRING

Studentene starter med selvstudium av pensum. Dette innbefatter lærebøker og andre kilder.

- Noen begreper som er sentrale i metoden:
- RAP: Readiness assurance proceess
  - iRAT: Individual Readiness Assurance Test
  - tRAT: Team Readiness Assurance Test
  - tAPP: Team Applications



Figur 1. TBL-syklus

Uken starter med iRAT og tRAT til ukens stoff. Disse vil telle som en del av mappekarakteren.

I klasserommet får studentene fler-valsoppgave i ukens stoff, den løses først individuelt, såkalt «Individual Readiness Assurance Test» (iRAT). Testen indikerer hvor godt forberedt studentene er til å sette i gang.

Studentene gjennomfører samme test i team, såkalt «Team Readiness Assurance Test» (tRAT). Teamene må diskutere og bli enige om den rette løsningen. Det benyttes skrapekort, se Figur 2. Ved rett svaralternativ er det en stjerne, men galt svar har et blankt felt. Teamet må fortsette å diskutere til de har fått frem en stjerne. Denne metoden kalles «Immediate Feedback Assessment Technique» (IF-AT® Epstein Educational Enterprises, Cincinnati, Ohio, USA).

IMMEDIATE FEEDBACK ASSESSMENT TECHNIQUE (IF AT®)					
Name _____	Test # _____				
Subject _____	Total _____				
SCRATCH OFF COVERING TO EXPOSE ANSWER					
	A	B	C	D	Score
1.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	___
2.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	___
3.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	___
4.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	___
5.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	___
6.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	___
7.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	___
8.	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	___
9.	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	___
10.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	___

Form# D018 • © 2012 Epstein Educational Enterprises, Inc. U.S. Patent No. 6,210,171

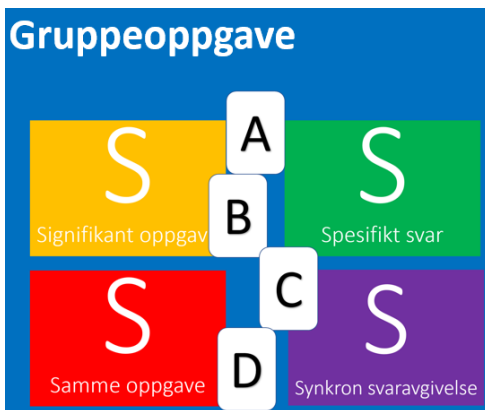
Figur 2. Skrapekort

tRAT-sesjonene bidrar til å løfte kunnskapsnivået til alle i gruppen.

Etter tRAT blir studentene utfordret til å skrive en appell, hvis de er uenig med svaralternativene. Appellen må vise til forberedelsesmaterialet og bidrar til at studentene lærer mer. Hvis appellen blir tatt til følge, kan studentene få uttelling selv om svaret var feil. Videre slipper læreren å «krangle» med studentene i timen. Ved å la iRAT og tRAT telle med i vurderingen, vil studentenes motivasjon til å forberede seg øke. Læreren avslutter RAT-prosessen med en minileksjon, slik at uklarheter blir ryddet av veien.

Hoveddelen i TBL er gruppearbeid (Team Application) tAPP (Michaelsen & Sweet, 2008). Kravene til tAPP-oppgaven/problemet (de fire S-ene):

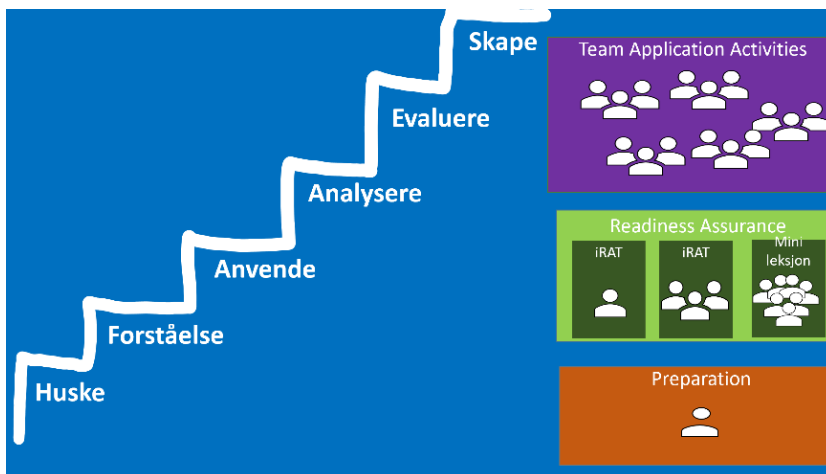
- Signifikant – relevant problem og må stimulere til å bruke metoder i emnet til å løse dem.
- Samme problem – alle team og individ må arbeide med samme problem,
- Spesifikke valg – individ og team må bruke lærestoffet som basis for spesifikke valg
- Samtidig rapport – team må rapportere sine resultat samtidig (i plenum)



Ønsker man å la tAPP-ene telle med på sluttvurderingen, må vurderingskriteriene være satt på forhånd, slik at man unngår unødvendig diskusjon og støy rundt vurderingen.

Etter hver sesjon med RAT(i og t) og gruppeoppgave (tAPP), kan hvert medlem i et team evaluere innsatsen til de andre i teamet. Denne gjensidige evalueringen vil kunne justere tRAT-karakteren, hver student fordeler en poengsum på de andre i teamet.

TBL-syklusen kan gjentas omtrent annenhver uke. RAT er på et lavt nivå i Blooms taksonomi (Anderson & Krathwohl, 2000) og bør brukes i starten på et nytt tema eller delkapittel. Veien videre kan være individuelle innleveringer og prøver, disse kan gjerne telle med i vurderingen av emnet.





## TBL-LABORATORIUM

TBL kan gjennomføres i klasserom eller auditorier, men sistnevnte er lite egnet til TBL. Sjøkrigsskolen har innredet et klasserom tilpasset teambasert læring, se Figur 3. Rommet har seks teambord med en stor skjerm på enden av bordene. Bak skjermen er det stikkontakter. Bordene har plass til opptil sju studenter og klasserommet vil kunne håndtere opptil 42 studenter. Med vanlig innredning har rommet plass til 24 vanlige skolepulter.



Figur 3. TBL-klasserom

## TEAMBASERT LÆRING I SEA

Emnet SEA omfatter mange forskjellige tema:

*Emnet skal gi kadetten god kunnskap om skipselektriske anlegg på marinefartøy. Emnet gir innføring i forskrifter, energiproduksjon, energidistribusjon og elektriske maskiner i lav- og høyspenningsanlegg. Emnet gjør kadetten i stand til å planlegge og arbeide sikkert i maritime elektriske anlegg. (FHS, 2020)*

Det er ikke hensiktsmessig å gjennomføre alle tema som TBL, noen kan tas i forlengelsen av en TBL-modul. Det ble gjennomført seks TBL-moduler, og følgende tema ble valgt ut:

1. Design av maritime elektriske anlegg, vekselstrøm og spenningsfall
2. Magnetisme og transformator
3. Synkronmaskin, generator
4. Likestrømsmaskin
5. Asynkronmaskin
6. Maritime høyspenningsanlegg og Forskrift om sikkerhet ved arbeid i og drift av elektriske anlegg (FSE)

Tema 1 og 2 ble gjennomført i TBL-klasserommet. Tema 3-6 ble gjennomført digitalt.

I første time ble studentene brifet på hva TBL innebærer. Det finnes mange nettsider som forklarer TBL-metoden, og det er viktig å bruke litt tid på dette, slik at studentene forstår hensikten og fordelene med TBL. Teamene ble satt sammen av lærer. Til dette ble det benyttet en undersøkelse i læringsplattformen (itslearning), slik at hvert team bestod av medlemmer med forskjellige forutsetninger. Det ble satt opp fire team med 3- 4 studenter, disse var permanente gjennom hele semesteret. Gruppene ble utfordret til å foreslå kallenavn på gruppen, se Figur 4.

<b>Gruppe A</b>	<b>Trekant kobling</b> Gruppe B	<b>Resistansen</b> Gruppe C	<b>Optimus Prime</b> Gruppe D
-----------------	------------------------------------	--------------------------------	----------------------------------

Figur 4. TBL-team

Det ble gjennomført en testrunde med iRAT og tRAT i temaet elektroteknikk, for å gjøre studentene kjent med TBL-syklusen og testregimet.

## GJENNOMFØRING AV TBL I KLASSEROM

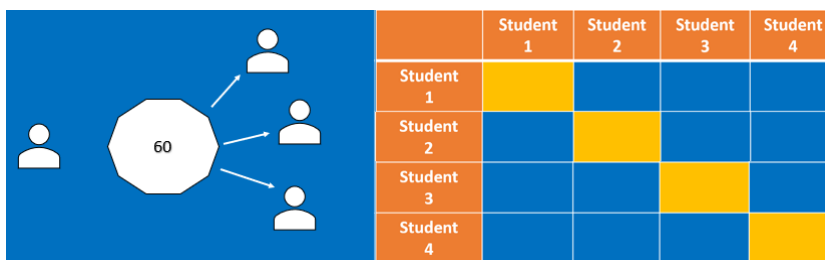
Studentene fulgte en detaljert plan for hver uke i OneNote med henvisning til læremål, begreper, oppgaver og pensum. Det ble også benyttet lydopptak av undervisning i OneNote med håndskrift, som gjorde det mulig å spille av lyd ved å bevege musen over teksten og starte avspillingen hvor som helst på siden. Timene på skolen ble brukt til å arbeide med stoffet og vi startet med iRAT som ble gjennomført som en flervalgstest på itslearning. Den bestod av 10 spørsmål med fire svaralternativer, og det ble satt av 20 minutter. Spørsmålene er typisk skrevet på Blooms taksonomi-nivå 1-3: huske, forstå og anvende. (Anderson & Krathwohl, 2000)

Etter at iRAT var levert inn, ble teamene umiddelbart samlet til tRAT. Spørsmål og alternativer ble levert på papir, og gruppene hadde 20 minutter til disposisjon. Teamene diskuterte og ble enig om den rette løsningen. Det var en intens stemning rundt bordene, og argumentene fløy frem og tilbake, før de valgte et alternativ på skrapeloddet. Konkurranseninstinktet blant studentene var til å ta og føle på. Gruppene passet på at de andre ikke fikk med seg hva de kom frem til.

Ved et par anledninger bestred noen av gruppene om svaralternativene var rett og leverte inn en appell. Ved å skrive en appell må studentene bruke pensum for å argumentere for hvorfor spørsmålet eller svaralternativene er uklare. Appellen vil bidra til økt læring hos studentene og samtidig gi lærer mulighet til å lage bedre tester til neste gang emnet skal gjennomføres. Det er viktig å samle inn alle spørsmålsark etter tRAT slik at det er mulig å gjenbruke spørsmålene neste gang. Det er tidkrevende å lage gode spørsmål og ikke minst gode svaralternativer. Hver RAT-syklus ble avsluttet med en kort gjennomgang i plenum. Dialogen mellom lærer og studentene var god og bidrog til å tette hull i studentens forkunnskaper.

TBL setter krav til utforming av gruppeoppgaven (tAPP). I litteraturen er det i liten grad beskrevet hvordan dette kan løses i teknologiske emner. Det benyttes ofte beregningsoppgaver der studentene trenes i å bruke modeller eller fremgangsmåter for å løse problemer. Det ble testet ut en oppgave som tilfredsstilte alle kravene til tAPP (de fire S-ene). Det viste seg ved flere tilfeller at det hadde betydning om tAPP var en obligatorisk innlevering eller ikke. Studentene legger mer arbeid inn i tAPP når besvarelsen blir vurdert. Det er tilstrekkelig med godkjent/ikke godkjent vurdering.

Det var lagt opp til at studentene skulle evaluere hverandre etter hver sesjon med RAT og tAPP. Dette er med på å gjøre studentene mer ansvarlig for egen læreprosess og sørger for at de bidrar i teamarbeidet. Hver av studentene fordeler 60 poeng på de andre i teamet. Hvis det er fire medlemmer i teamet, vil hver student gi de tre andre i snitt 20 poeng, mindre hvis de mener at bidraget eller innsatsen har vært lav og i motsatt fall mer enn 20 poeng. Studentene må begrunne poengfordelingen til de andre studentene i teamet sitt. Poengsummen vil kunne justere tRAT karakteren.



Det blir fort mange vurderinger å holde styr på, og det viser seg at de fleste studenter gir ut like mange poeng til alle i gruppen. Det har likevel noe for seg med gjensidig evaluering, fordi det forplikter alle gruppemedlemmene til økt innsats og dermed økt læring.

Etter at en TBL-modul var gjennomført, jobbet studentene videre med gjennomgang av andre tema, oppgaveløsning og laboratorieøvinger. Studentene er vant med omvendt klasserom, og det var derfor lett å fortsette med dette i tema som ikke var en direkte del av en TBL-modul. Det viste seg også at mange studenter foretrakk å jobbe sammen i team der dette var naturlig.

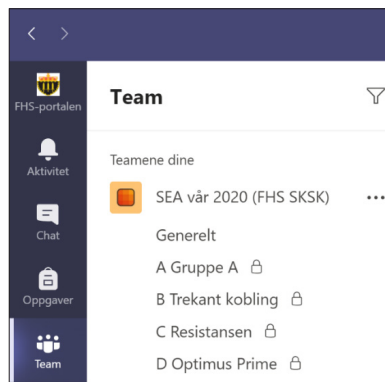
## DIGITAL TBL

12. mars 2020 ble all undervisning flyttet fra klasserom til hjemmekontor over natten. OneNote var sentral i formidlingen av lærestoffet før hjemmeundervisningen ble en realitet og fungerte godt som plattform for asynkron videoundervisning og synkron veiledning på nett. Overgangen fra klasserom til Teams ble derfor liten

når hovedplattformen for undervisning var uendret. TBL-syklusen ble videreført digitalt, og de fire gruppene ble overført til Teams, se Figur 5.

Det ble gjennomført fire digitale TBL sykluser:

3. Synkronmaskin, generator
4. Likestrømsmaskin
5. Asynkronmaskin
6. Maritime høyspenningsanlegg og FSE



Figur 5. Grupperom på Teams.

Uken startet på Teams med iRAT som var lagt ut på itslearning. Deretter ble teamene samlet til tRAT i grupperom på Teams, se Figur 5. Lærer gikk inn og ut av grupperommene på Teams. tRAT ble gjennomført som en flervalgstest i itslearning. I starten var det problemer med å få til skrapelodd-funksjonen (IF-AT). Dette ble løst ved å gjennomføre samme tRAT fire ganger, se Figur 6.

Hver RAT-syklus ble avsluttet med en felles gjennomgang i plenum på Teams. Her oppstod en god dialog mellom lærer og studenter, og uklarheter ble ryddet av veien. Undervisningen som var lagt ut på OneNote i forkant, fungerte godt som grunnlag for å svare på disse uklarhetene. Gruppeoppgaven (tAPP) ble lagt ut på OneNote, og gruppene møttes på Teams. Lærer var innom alle gruppene og veiledet. Her viste det seg at OneNote var et ypperlig verktøy til veiledning, fordi all undervisning var samlet. Det ble ikke gjennomført gjensidig evaluering i perioden med digital undervisning. Etter at en digital TBL-modul var gjennomført, jobbet studentene videre med oppgaveløsning og innleveringer.

Beskrivelse		
Dette er <b>første</b> tRAT, her skal <b>alle spørsmål besvares</b> .		
Denne testen skal utføres uten hjelpemidler og løses sammen med teamet ditt. Bruk grupperommet på teams, lærer kommer innom.		
DET ER KUN tRAT-leder som skal svare for gruppen. Bruk en ny person på hver test.		
Test	Tid	Besvarte spørsmål
<b>tRAT 5.1</b>	<b>16 min</b>	<b>Alle</b>
tRAT 5.2	4 min	Kun de som var feil i 5.1
tRAT 5.3	3 min	Kun de som var feil i 5.2
tRAT 5.4	2 min	Kun de som var feil i 5.3

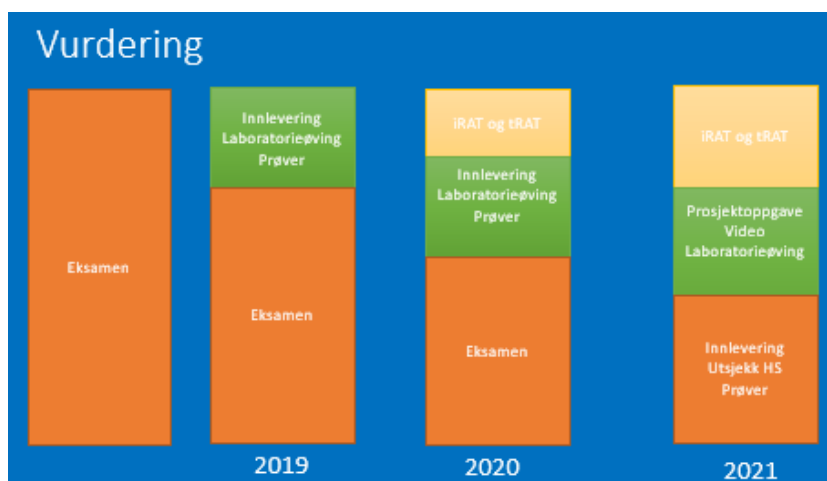
Figur 6. tRAT på itslearning.

## VURDERING

Skriftlig skoleeksamen har vært brukt som vurdering i SEA så lenge emnet har eksistert. I de senere år har det blitt lagt til en mappevurdering som først talte 30 %, se Figur 7. Det finnes mange alternativer til eksamen. Valg av vurderingsform påvirker læreplassen (Raaheim, 2016). En eksamen kan trekke studentens fokus vekk fra læring. I SEA våren 2020 var vurderingen 50 % mappe og 50 % skriftlig eksamen. Ved å benytte TBL som undervisningsform ble vurderingen mer formativ. iRAT og tRAT støttet opp om læringsprosessen og holdt studentene fokusert. Eksamen som vurderingsform er ikke tilpasset TBL, og ved gjennomføring av emnet våren 2021 ble vurderingen endret til 100 % undervisningsvurdering, se Figur 7. Vurderingsprosessen består av 45 % teamaktiviteter og 55 % individuelle aktiviteter, spredt utover hele semesteret. Dette vil gjøre det lettere for studentene å holde fokus på læringsprosessen, og man unngår at eksamen «stjeler» oppmerksomheten på slutten av semesteret.

En av de store fordelene med TBL er at læreren kan bruke mer av undervisningstiden til å veilede. Det var uvant å overlate forberedelsene til studentene, men de fleste tok ansvar for egen læring. Det var en klar sammenheng mellom resultatene på iRAT og resultatene på de større prøver underveis i semesteret. Det er viktig å følge opp studenter som ikke henger med allerede fra starten. Dette er lettere når man bruker mange små vurderinger underveis i semesteret.

TBL innebærer at studentene må jobbe jevnt gjennom hele semesteret, og de kan oppleve dette som mer arbeidskrevende enn emner med lite undervisningsvurdering. Det er viktig å ha studentene på lag og unngå at arbeidsbelastningen blir for høy. Det er derfor en fordel at forberedelser gir uttelling på sluttvurderingen.



Figur 7. Vurdering SEA.

## ERFARINGER MED TBL

Det er ingen tvil om at utøvelsen av lærerrollen har endret seg med overgang fra tradisjonell undervisning til TBL. Økt bruk av læringsteknologi gir læreren mer tid til veiledning av den enkelte student. Studentene deltar mer aktivt i egen læringsprosess og har et større sug etter kunnskap. TBL-prosessen gjør at pensum blir repetert flere ganger gjennom forberedelse før timen, og de lærer av hverandre i teamtest (tRAT) og gruppeoppgaver (tAPP).

Resultatene fra iRAT og tRAT viser at grupperesultatene var klart bedre enn studentenes individuelle resultater. Medianverdi for antall riktige svar var 9 for tRAT og 7 for iRAT. Deltagelsen på alle testene var 100 %

Det er viktig å skape velfungerende team ved oppstart av semesteret, og man må bruke tid på å sette seg inn i bakgrunnen til studentene og deres foretrukne måte å lære på. Jeg observerte at flere brukte gruppen utenom undervisning og i andre emner. Dette indikerer at sammensetningen av teamene fungerte.

TBL krever mye forberedelse av læreren. Det ble laget detaljerte ukeplaner og faginnhold i OneNote. Ukeplanene hadde en oversikt over aktuelle tema, begreper og sammenhenger, som studentene kunne bli testet på iRAT og tRAT. Mye av undervisningen var asynkron, og det ble laget mye video. Videoene var korte, ca. 5-15 minutter, og ble tatt opp med Camtasia Studio og publisert på YouTube. Studentene fikk tilgang til videoene via OneNote, og på samme side ble notatene eller PowerPoint presentasjonen som ble brukt i videoen, lagt ut. Studentene kunne da velge om de ville se videoen eller om det var tilstrekkelig å se igjennom notatene, eventuelt begge deler. YouTube har en god funksjon for videostatistikk og gir læreren mulighet til følge med på hvor mye videoene blir sett.

Første del av semesteret ble gjennomført i TBL-klasserommet og etter hvert helt digitalt via Teams. TBL legger opp til at studentene skal jobbe sammen i grupper. Det var en fordel at teamene hadde jobbet sammen fysisk, før all undervisningen ble flyttet over på Teams. Veiledningen av studentene i Teams fungerte godt, og dialogen var merkbart mye bedre i grupperommene fremfor veiledning i plenum. Det var en stor fordel at all undervisning var tilgjengelig i OneNote i forbindelse med digital undervisning. Lærer kunne da raskt dele aktuell undervisning og tilføre supplerende informasjon.

Test av forkunnskaper (RAT) og andre innleveringer bidrog til at studentene hadde konkrete tidsfrister å jobbe mot. Studentene ga utrykk for at de likte TBL, noe tilbakemeldingene viser:

- *Som fjernundervisning er TBL det beste jeg har hatt så langt...*
- *TBL tvinger oss til å forberede oss til timene. Da skjønner vi hva som blir snakket om i timene...*
- *... jeg synes videoer er helt genialt. Det gjør det lettere å forstå... Videoene er nok det jeg liker aller best med TBL.*
- *... gruppeoppgaver via Teams er supereffektivt, jeg løser oppgaver selv, får samme utbytte som selvstendig oppgaveløsning...*



## KONKLUSJON

Skipslektriske anlegg er et stort og omfattende emne. Jeg var derfor spent på om det var mulig å gjennomføre omvendt undervisning og likevel komme gjennom pensum. Det viste seg at studentene tok ansvar og brukte mye tid på forberedelser før RAT. Arbeidsbelastningen ble høy, og det er derfor viktig at undervisningsmaterialet er tilpasset, strukturert og ikke mer omfattende enn nødvendig. Noen av fordelene med TBL er at studentene kan gjennomføre den digitale undervisningen når og hvor de måtte ønske, og i eget tempo. Semesteret våren 2020 ble undervisningen over natten flyttet fra klasserom til hjemmekontor sømløst. Dette viser fleksibiliteten som ligger i TBL og viktigheten av at undervisningsressursene er digitale. Det er ikke tilstrekkelig å digitalisere undervisningen uten en pedagogisk verktøykasse som er tilpasset de nye mulighetene. Jeg har brukt de digitale undervisningsressursene aktivt og gjennomført omvendt undervisning. TBL har gitt meg et hav av nye muligheter og ideer for utvikling av digital undervisning. TBL er ikke nødvendigvis en metode som passer for alle, men tar du sjansen, vil belønningen være studenter som er aktive i egen læringsprosess. Du får mer tid til veiledning av grupper og enkeltstudenter.

## REFERANSER

- Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2000). *A taxonomy for learning, teaching and assessing*. Allyn & Bacon.
- FHS. (2020). *ING2310 SKIPSELEKTRISKE ANLEGG*. Hentet fra <https://utdanning.forsvaret.no/nb/emne/ING2310/374>
- Michaelsen, L. K., & Sweet, M. (2008). The Essential Elements of Team-Based Learning. *New Directions for Teaching and Learning*, s. 7-27.
- Raaheim, A. (2013). *Råd og tips til deg som underviser*. Gyldendal akademisk.
- Raaheim, A. (2016). *Eksamensrevolusjonen - Råd og tips om eksamen og alternative vurderingsformer*. Gyldendal akademisk.
- Sæbø, A. (2016). Undervisning og digitale verktøy. *Necesse*, 1(2), s. 26-27.

---

# Tavleløs undervisning i matematikk – omvendt klasserom og teambasert læring

Ellen Margit Krätzig-Berle

*Seksjon for sjømilitær teknologi, FHS Sjøkrigsskolen*

De svarte tavlene har gjennom flere århundrer vært uunnværlig inventar i alle undervisningsrom. For noen år siden forsvant disse fra klasserommene på Sjøkrigsskolen. De ble i første omgang erstattet med elektroniske tavler, deretter med hvite tavler, som også fungerer som lerret. Den teknologiske utviklingen har gjort det mulig at lærerne nå kan velge blant flere undervisningsformer, og ikke minst pandemien, som har gjort fysisk fremmøte i klasserommet til dels umulig, har tvunget frem en liten pedagogisk revolusjon.

Når vi tenker undervisning, ser vi fremdeles for oss en lærer som formidler stoffet «på tavlen» foran en gruppe elever. Spesielt gjelder dette matematikk som er ett av de klassiske fagene og som det har blitt undervist i gjennom århundrer. I skolen har det vært gjennomført en del reformer i den senere tid uten at det ser ut til at det har økt matematikkinteressen noe nevneverdig. Høyskoler og universiteter har derimot lenge kjørt tradisjonelle undervisningsopplegg i matematikk. Som oftest består disse av forelesninger som forklarer og utleder teorien, regneøvinger der studenten innøver teorien og omgjør teori til praksis, og til slutt en skriftlig eksamen som tester om studenten har de nødvendige kunnskapene.

Universitetet i Oslo ble åpnet i 1813 med fem professorer og 18 studenter. Det sier seg selv at kontakten mellom lærer og student var en helt annen enn den er nå når det kan være flere hundre studenter i et kurs. Men når man ikke kan unne seg luksusen med å ha læreren tilnærmet for seg selv, gjelder det å ta andre virkemidler i bruk. På universitetet i Oxford for eksempel er undervisningen på den grunnleggende utdanningen organisert rundt ukentlige smågruppeopplæringer som så støttes av klasser, forelesninger, seminarer og laboratoriearbeid.

Det er helt opplagt at man i dagens undervisning kan dra nytte av at det finnes, og stadig utvikles, ulike elektroniske hjelpemidler som kan støtte opp under det formidlingsarbeidet en lærer skal utføre. Kommunikasjonen mellom lærer og student, og også mellom studentene, har mange flere bein å stå på, der læringsplattformer som for eksempel itslearning eller Canvas tas i bruk. Og rent bortsett fra at det ligger en uendelig mengde med mer eller mindre egnet undervisningsmateriale allerede ferdig på internett, har læreren også stadig bedre muligheter til å produsere eget materiell.

For et par år siden begynte jeg å eksperimentere med undervisningsstilen min. Det har vært en spennende erfaring å løse seg noe fra lærebok og forelesning og utnytte de nye mulighetene. Prosessen har ført til at jeg etter hvert har brukt «flipped classroom» eller omvendt klasserom, som betyr blant annet at studenten lærer seg teorien på egen hånd, og tiden i klasserommet brukes til å sette det lærte om i praksis. Denne prosessen er jeg langt ifra ferdig med. En del ting har jeg prøvd ut, og jeg ser både fordeler og ulemper med opplegget. En del erkjennelser har jeg ervervet om virkemidler som kan gi bedre læring. Og én ting er sikkert: Hver student har sin egen måte å lære på, så ingen metode vil passe for alle. Spørsmålet er om man kan eksperimentere seg frem til fremgangsmåter som passer tilnærmet de fleste, ved å finne frem til den gylne middelvei?

## **FRA FORELESNINGER TIL SELVSTUDIUM VED HJELP AV VIDEO**

Målet med forelesninger i matematikk har i all hovedsak vært å utlede og forklare teorien. Som student på 70-tallet opplevde jeg stort sett forelesninger i en sal med vel 300 studenter. Forelesningene var preget av en professors monologer som var kombinert med en vanvittig fart for å fylle de enorme tavlene. Få studenter torde å stille spørsmål, og få professorer likte å bli avbrutt. Som student måtte man velge mellom å prøve å skrive nesten like fort som professoren eller å prøve å forstå

hva som foregikk på tavlen. Begge deler var som oftest umulig å få til. De fleste forelesningene var altså dårlig egnet til læring.

Nettopp det å gjøre seg kjent med teorien opplever studenten gjerne som en heller «ensom» fase i læringsprosessen, spesielt også fordi alle lærer og forstår i «sitt eget tempo» og ønsker å benytte seg av egne strategier for å oppnå forståelse. I en forelesning er dette umulig, men dette vil være enklere å få til når digitale hjelpemidler tas i bruk. En klassisk forelesning kan for eksempel erstattes ved å sette sammen videoklipp, enten lånt fra det rikholdige arkivet som allerede finnes på nettet, eller ved egenprodusert materiale. Fordeler med selvlagete videosnutter kontra ferdig materiale er at man kan tilpasse dem optimalt til stoffet, og som lærer kan man få til bedre kontakt med sine studenter. Nå kan studenten jobbe i det tempoet, og ikke minst på tider, som hun/han selv ønsker. Det blir også enklere å gjøre dette til en ikke fullt så ensom fase om man velger å gå gjennom stoffet i små grupper.

En klassisk forelesning varer gjerne i to timer, men slike video-sesjoner er enklere å dele opp i kortere snutter, slik at man unngår «forelesningsmaraton» og kan utnytte tiden mer effektivt. Men det er ikke til å stikke under stol at denne formen for innlæring stiller større krav til egendisiplin hos studentene. En ting er å møte til en oppsatt forelesning i en sal med mange andre som har det likedan som en selv. En helt annen ting er å ta ansvar for egen læring, altså å sette seg ned for seg selv og jobbe seg gjennom en video. Her kan en kombinasjonsløsning hjelpe studenten i gang. Man kan for eksempel presentere nytt stoff i meget korte trekk i en slags miniforelesning på maksimalt en time (helst mindre), og studenten kan på denne måten få en oversikt over mål og mening med innholdet i et nytt kapittel. Siden kan studenten bruke tid til å dykke ned i detaljene i den tilhørende videoen. En annen fordel med videoer istedenfor forelesninger er at disse kan repeteres når man måtte ønske.

## FRA REGNEØVELSER TIL TEAMBASERT LÆRING (TBL)

Den viktigste brikken i studentens «læringsmur» er å forstå hvordan teorien kan brukes til å løse både oppkonstruerte og konkrete problemstillinger, altså å omsette teori til praksis. Tradisjonelt skjer dette i regneøvelser/kollokviegrupper. Der skal studenten erfare hvilke anvendelsesområder teorien har, og hvordan forskjellige teorier henger sammen og til sammen kan løse gitte problemstillinger. Det er hele poenget med innlæringen, og på denne måten vil kunnskap befestes og fordypes.

Å jobbe med konkrete oppgaver er en ypperlig arena for å praktisere teamarbeid, teambasert læring. I mindre arbeidsgrupper, helst ikke flere enn fem, skal man ta ansvar for hverandres læring. Siden man ofte blir utfordret til mye mer refleksjon enn om man bare jobber med de problemene man selv ser, fremmer denne arbeidsmåten derfor også egen læring. Terskelen for å stille spørsmål i gruppen er gjerne lavere, når det bare er noen få studenter som «hører». Og det er ofte lettere å forstå når vanskelige ting blir forklart av medstudenter som vil bruke andre ord enn læreren.

Det viktigste aspektet med å arbeide sammen i små grupper er å stimulere til diskusjon. I flere av læringsmålene nevnes viktigheten av å kunne kommunisere om matematikk. Jeg anser det som enormt viktig at studentene etablerer et godt og produktivt samarbeid i gruppen. Det er helt tydelig at grupper som har fungert rimelig bra i så henseende, har gjort det bedre enn grupper der det er minimalt med samarbeid. Og etter min erfaring er det her de største «gevinstene» kan innkasseres, både i form av optimal tidsutnyttelse, forståelse og ikke minst resultater.

Sjøkrigsskolen investerte nylig i et klasserom spesielt designet for denne formen for undervisning. I klasserommet finnes det nå seks gruppebord med hver sin dataskjerm, og hvert bord har plass til fem studenter. Om alt virker som det skal, skal studentene jobbe sammen om de samme oppgavene der problemstillinger og løsningsmetoder skal diskuteres og utprøves i felleskap. I disse timene fungerer læreren stort sett som veileder. Men om det viser seg at «alle» sliter med forståelsen av en bestemt problemstilling, kan veilederen fort bli til lærer igjen.

Et hjelpemiddel jeg har benyttet meg av i eksperimenteringen min, er de såkalte TBL-testene som hvert kapittel avsluttes med. Det er flervalgstester på ca. 20 minutter der studenten først tar testen alene. Etter å ha levert inn løsningen tas den samme testen en gang til i gruppen der medlemmene nå må diskutere og bli enige om en løsning. Er svaret feil må de argumentere videre til rett løsning er funnet. Diskusjonen er det viktigste med disse testene, og mange studenter opplever dette som veldig lærerikt.

Nå er kadettene fra øvelser og praksis vant til å jobbe i team. Et oppdrag «ut i felten» kan ofte ikke gjennomføres uten at hele teamet jobber sammen. Der er et team altså ikke bedre enn det svakeste ledd. Slik vil det nødvendigvis ikke være med teamet i klasserommet og som endatil skal jobbe med svært teoretiske problemstillinger. For her *kan* enhver faktisk være «sin egen lykkes smed». Man kan altså lykkes alene uten at alle i gruppen består. Dessuten er det gjerne ikke så klare gruppestrukturer, ingen gitt rolle- og ansvarsfordeling, oppdraget kan være noe mer diffust, og det gjør det vanskelig å etablere en bestemt gruppedynamikk. Men på samme måten som ut i felten er dette en fin arena for å lære og utøve lederskap. Dette er noe som man som lærer og veileder må ha et bevisst forhold til.

## PROSJEKT

Når studenten gjennom teori og oppgaver/problemstillinger har fått en grunnleggende forståelse for de forskjellige ingrediensene i emnet, kommer lakmустesten. Kan problemer løses som er mer komplekse og som forutsetter at man må kombinere flere løsningsmetoder? Kan studenten avgjøre hvilke problemstillinger som krever hvilke løsningsmetoder, alene eller i kombinasjon? Og kan studenten trekke paralleller og løse andre problemer enn dem man har trent på? Jeg ønsker å gå i bresjen for prosjektarbeid. I et prosjekt, og det kan gjerne være flere studenter som er sammen om det, kan man knytte sammen komplekse problemstillinger og teste om studenten har en overordnet forståelse av emnet som helhet. Studentens arbeid med prosjektet skal så resultere i en prosjektrapport og en muntlig redegjørelse. Rapporten inneholder selve problemløsingen og en beskrivelse av veien til målet. I

tillegg stilles det krav til å kunne uttrykke seg skriftlig og vise at man behersker det matematiske språket. En muntlig redegjørelse tester presisjonsnivået i språket og motiverer studenten til å bidra så mye som mulig til prosjektet.

## EVALUERING GJENNOM EKSAMEN ELLER «NOE ANNET»?

Spørsmålet bringer oss rett til problemstillingen *evaluering*, som i all hovedsak har skjedd via en skriftlig eksamen på slutten av et emne. Det har vært en grei løsning, ikke minst fordi den er enkel å gjennomføre og er lik for alle. Videre gir den en god indikasjon på hvor mye studenten har lært om emnet. Selv om det å forberede seg til eksamen til en viss grad fremmer læring, bidrar selve eksamen ikke nevneverdig til det. Dessuten tester den i mindre grad forståelse, og man kan komme langt med en ren pugging. TBL-testene, og kanskje en godkjent test innimellom på om man er i rute, vil gi en ganske bra underveis-evaluering. Spørsmålet er derfor: Bør skriftlig skoleeksamen som avsluttende evaluering avskaffes til fordel for «noe annet»? Og kan «noe annet» være at studenten må gjøre rede for problemstillinger og løsninger i tilknytning til prosjektoppgaven?

## KORONA

Pandemien og nedstengingen har ført til at tradisjonell undervisning og evaluering har blitt vanskelig å gjennomføre. Man kan selvsagt holde en forelesning på Teams, men jeg vil påstå at det blir enda vanskeligere å holde på oppmerksomheten til studenten i en to timer lang nett-forelesning. Når studenten likevel sitter alene, vil små videonutter kunne gjøre samme nytten, men studenten har bedre muligheter for å absorbere stoffet. Når det gjelder oppgaveløsning, vil små grupper kunne jobbe sammen digitalt selv om de sitter på hvert sitt rom. Som lærer på Teams er det også mulig å holde kontakten med de forskjellige gruppene, «stikke innom» og veilede målrettet. Skriftlig skoleeksamen har vært vanskelig eller umulig å gjennomføre, og det har vist seg at det ikke i alle emner er like enkelt å finne alternativer. Det tvinger frem en diskusjon om alternative eksamensformer, og de bør knyttes tett sammen med undervisningsformen som velges.

## TILBAKEMELDING FRA STUDENTENE ETTER EKSPERIMENTERING

Hva sier så studentene? Jeg har fått en del tilbakemeldinger etter eksperimenteringen, og som forventet er ikke alle like fornøyde. Spesielt er det et ønske om forelesning som går igjen. Som forventet er det ikke alle som klarer å motivere seg til selvstudium. Miniforelesninger imøtekommer studentenes ønske langt på vei. Når det gjelder de positive tilbakemeldingene, trekker studentene spesielt frem at de opplever å ha utnyttet tiden som de bruker på emnet, mer effektivt, og at de har lært mer på kortere tid.

## VEIEN VIDERE

Det er opplagt at undervisningsformen spesielt i klassiske emner som matematikk bør forandres fra «slik vi alltid har gjort det» til å trekke de nye hjelpemidlene man har fått, inn i undervisningen. Spesielt har Korona-pandemien tvunget frem endringer. Noen mener at alle de digitale hjelpemidlene kan føre til at læreren blir overflødig. I praksis viser det seg at så ikke er tilfellet. Læreren er fortsatt en meget viktig aktør på veien til forståelse, men da i en annen og kanskje mer kompleks rolle. Først må det settes sammen et godt undervisningsopplegg med gode forklaringer, gode eksempler og oppgaver som er tilrettelagt for gruppearbeid, og ikke minst gode prosjektoppgaver. Deretter blir veiledningstidene lærerens kvalitetstid med studentene, og det er det jo nå flere av enn før, fordi forelesningene er borte. Det krever en helt annen fleksibilitet enn å stille opp til en velforberedt forelesningstime. Men det gir også mer nærhet mellom student og lærer. Læreren har bedre muligheter for å «se» studenten. På Sjøkrigsskolen er vi i den heldige situasjonen at vi har fått et rom som er spesialtilpasset for TBL-undervisning. Flere slike rom vil nok gjøre det mulig for mange flere å ta denne undervisningsmetoden i bruk. Man ser også at de forskjellige elektroniske systemene ikke alltid kommuniserer godt nok med hverandre og programmer kan ha funksjonalitet av varierende kvalitet. Når det gjelder alternative undervisningsformer er mulighetene mange, og det er bare å starte eksperimenteringen!

---

# Erfaringar frå digital undervising av Sensorsystemer for Navigasjonslinja på Sjøkrigsskolen

Linn-Kristine Glesnes Gaupholm  
*Seksjon for sjømilitær teknologi, FHS Sjøkrigsskolen*

Koronapandemien gjorde at lærarar måtte kaste seg ut på ukjent, digitalt farvatn. Det vart prøving og feiling, men vi kom oss stort sett gjennom. Eg trur det er viktig at vi tek oss tid til å reflektera rundt korleis vi løyste utfordringa som kom så brått på, slik at vi kan læra av den. Denne teksten er eit forsøk på nettopp det.



Våren 2020 vart emnet Sensorsystemer på 7,5 studiepoeng undervist for linja Sjømakt og militær navigasjon (SMN) for første gong. Faget var planlagt som ein variant av Teambasert læring (TBL) med omvendt undervising. Då koronaviruset spreidde seg verda over, var vi, som alle andre, tvungne til å gjera undervisinga digital. I dette essayet vil eg reflektera rundt digitaliseringa av faget, men også kva som fungerer og kva som kan forbeistrast for å fremja kadettane si læring i faget i ein vanleg klasseromskvardag.

## INNLEIING OG MOTIVASJON FOR TBL

Første gong eg for alvor blei klar over undervisningsmetodane Teambasert læring (TBL) og omvendt undervising, var på eit føredrag med Arild Raaheim på Sjøkrigsskolen i 2018 (Raaheim, 2018). Raaheim inspirerte meg til å prøva noko litt anna enn å berre førelesa for studentane.

Å førelesa for ein klasse er (etter mi meining) relativt enkelt. Eg likar godt å førebu ei førelesing. Det å grave seg ned i eit emne som eg skal strukturera og forsøka å formidla til nokon andre på forståeleg vis, er sjølve grunnen til at eg vart lærar. Sjølv har eg òg vorte eksponert for ei enorm mengd førelesingar som student, og eg må innrømme at trass ei lang og god lektorutdanning, så var det berre denne forma for undervising som var naturleg for meg å ta i bruk då eg sjølv starta å undervisa. Men Raaheim utfordra noko i meg. Er dette den beste måten for studentane å læra på?

Utfordringa trefte meg på fleire plan. Som tidlegare student kunne eg kjenne at, jo, eg var ein av dei som føretrekte førelesingar fordi det ikkje kravde noko av meg. Eg kunne møte opp og få «servert» pensum ferdig preparert. Ein del av fagstoffet kunne eg nok fordøya medan eg satt der, men det eg lærte sterkast var dette: å gå på førelesing er ikkje nok for å læra. Eg var nøydd å arbeida med pensum sjølv.

Som lærar kunne eg kjenne på at, ja, det er enkelt og ufarleg å førelesa. Så lenge du har «sagt det» i timen, så har du ryggen fri, og det er opp til studentane om dei lærer seg «det» eller ikkje. Men eg er tilsett for at studentane mine skal læra mest mogleg av meg, og eg var ikkje lenger overtydd om at førelesing var beste metode å bruka for å oppnå det.

Sensorsystemer er eit fag som inngår i utdanninga Bachelor i militære studiar med fordjuping i leiing, sjømakt og militær navigasjon (SMN). Faget vart undervist første gong våren 2020, og byggjer på faget Sensorteori frå gamal ordning. I tillegg til å gje ei innføring i korleis ulike sensorar verkar, så inneheld faget ein del fysikk-teori om elektromagnetisme. Nivået i faget kunne difor opplevast som svært høgt for mange, og mogningstida altfor knapp. Vi<sup>1</sup> som lærarar såg på dette som ei utfordring. Korleis skulle vi forsikre oss om at kadettane arbeidde nok med pensum gjennom semesteret? Vi var klar over at det kom til å bli intensivt og krevjande for

---

<sup>1</sup> Vi var to kollegaar som underviste faget i fellesskap, den andre var Christophe Massacand.

mange, og visste at det einaste som ville få alle gjennom var om dei jobba jamt og trutt frå dag ein. Det var vi usikre på om ville skje dersom vi la opp til det tradisjonelle førelesingsregimet – vi var redd for at ein hektisk kvardag ville gjera at kadettane nedprioriterte faget, og heller gjorde skippertak ved behov.

Vi tok utgangspunkt i Teambasert læring (Team-Based Learning Collaborative, 2021) og modifiserte metoden. Til kvar økt måtte kadettane førebu seg ved å lesa eitt til fire delkapittel av pensum, som vart testa i ein lesequiz i starten av økta. Lesequizen hadde maks fem (enkle) spørsmål med svaralternativ, og testa berre om dei hadde lest. I løpet av semesteret planla vi fire større quizar som vi kalla Emnequizar. Emnequizen hadde maks 10 spørsmål med svaralternativ, men her kunne det koma både rekneoppgåver og spørsmål som kravde forståing. Emnequizen tok kadettane to gongar, først åleine på itslearning, deretter saman med teamet sitt som skrapeloddstest. Vi planla ingen vanlege førelesingar, men i tillegg til lærebøker hadde vi ei OneNote-notatblokk kor vi prøvde å forenkla pensum der vi kunne, forklara på andre måtar enn lærebøkene, og supplere med lenker til videoar og animasjonar som kunne støtte forståinga. Til kvar økt laga vi også eit sett med oppgåver som gruppene skulle jobba med i timen. Desse var stort sett designa slik at kadettane fekk jobba seg gjennom dagens pensum gjennom diskusjon av nye konsept og lovar, i nokre tilfelle knytt til ein animasjon. Både lesequiz og emnequiz vart teljande i mappa i faget (totalt 30 % av karakteren var mappe, det inngjekk også litt andre vurderingar i den).

Vi fekk tre veker saman i klasserommet før undervisinga måtte digitaliserast. På denne tida rakk vi å gjennomføra den første emnequizen i faget. Det var akkurat nok tid til at kadettane oppfatta og blei van med undervisingsmetoden, og det verka som dei syns det var ein grei måte å jobba på.

Frå lærarperspektivet opplevde eg det som nyttig å vandre rundt i klasserommet og snakka saman med kadettane i mindre grupper. Eg fekk i gang gode diskusjonar om fagleg forståing, og eg fekk betre kontakt med kadettane samanlikna med ein tradisjonell førelesingstime. Ei erfaring var at berre ved å vera «floge på veggen» og spasera rundt mellom pultane, så fekk eg avdekka misforståingar i forklaringar kadettane mellom. Det opplevde eg som spesielt nyttig, då dette blei gode og spontane situasjonar for læring og aha-opplevingar.

## **KVA ENDRA SEG DÅ UNDERVISINGA MÅTTE DIGITALISERAST?**

Om kvelden 11. mars fekk vi beskjed om at Sjøkrigsskolen skulle stengast og all undervising måtte over på digital plattform. 12. mars skulle vi etter planen ha Emnequiz nummer 2, og vi måtte kaste oss rundt og finne ut korleis vi kunne gjennomføre den.

Det var fleire praktiske utfordringar. Korleis skulle vi kommunisere med studentane? Det kan verka heilt fjernt no når vi er så van med (Microsoft) Teams, men vi hadde ikkje teke det skikkeleg i bruk før 11. mars. Dels kommuniserte vi med kadettane på e-post og dels på itslearning, men aller mest munnleg, og sjeldan eller aldri på Teams. Dei første dagane med digital undervising fekk

kadettane kommunisera med kvarandre på sjølvvald plattform, dei fleste gjorde det på Facebook.

Dei første to øktene var vi tilgjengelege for kadettane både på Teams og itslearning, men hadde ingen organisert undervising eller kontakt. Den første økta gjekk med til Emnequiz. Den blei gjennomført på itslearning i to omgangar, først individuelt, deretter saman i gruppene. Det var ingen kontroll på om kadettane samarbeidde på den individuelle delen, men resultata tyda ikkje på det. Den andre økta hadde vi «vanleg opplegg», det betydde Lesequiz og gruppearbeid. Gruppene blei oppfordra til å jobba saman om gruppeoppgåvene digitalt, og vi var tilgjengeleg for oppringing eller meldingar. Først 16. mars fekk vi oppretta gruppekanalar til kvar gruppe i Teamet vårt. Etter dette blei standard rutine at gruppene starta eit møte i sin kanal, og vi lærerar gjekk inn og ut av gruppekanalane og blei oppringt ved behov.

Etter kvart vurderte vi dette som ein god måte å halde framdrift på når det ikkje var eit alternativ å treffast fysisk. Vi hadde ein stor fordel i at mykje av opplegget vårt allereie var planlagt digitalt og med omvendt undervising. Vi hadde alt pensum skriftleg i delt notatblokk i OneNote (i tillegg til digitale kompendium og ei fysisk lærebok). Kadettane var van med at dei skulle førebu seg til timane på eigenhand, og vi hadde Lesequiz og individuell Emnequiz på itslearning.

Då det etter kvart blei klart at koronaviruset ikkje kom til å forsvinna stille ut døra med det første, måtte vi gjera ei vurdering av eksamensforma i faget. Ulike måtar å gjennomføre skriftleg eksamen på vart diskutert og vurdert, men vi følte ikkje vi kunne gjennomføra det på ein god måte. Vi kom fram til at munnleg eksamen ville vera den beste måten å få vurdert kadettane på, og såg også løysingar for korleis den kunne gjennomførast digitalt. Allereie 20. april vedtok Programutvalg SMN2 endringa. Denne endringa gjorde at vi frå eit relativt tidleg tidspunkt fekk understreka for gruppene at det var svært viktig for dei å samarbeida og øva seg på å *snakka* fysisk saman. For å motivera dei ekstra for gruppesamarbeid delte vi eksamen i to; ein del der kvar gruppe fekk utlevert ei oppgåve to dagar før eksamen som dei skulle førebu seg på i fellesskap, så ei trekt oppgåve frå ein annan del av pensum som ikkje vart avslørt før kandidaten var oppe til eksamen.

## MINE REFLEKSJONAR RUNDT DIGITALE KLASSEROM

Det aller viktigaste eg syns vi mistar i virtuelt klasserom, er kommunikasjon ansikt til ansikt, kroppsspråk, og det sosiale i å vera fysisk samla. Eg merkar stor skilnad på å spasere rundt i klasserommet mellom gruppene, og å virtuelt gå inn og ut i grupperom på Teams. Noko av det same ville eg nok opplevd dersom gruppene satt åtskild på forskjellige klasserom også. Mellom anna så forsvinn dei spontane fellessamtalane ein kan ta med heile klassen dersom ein oppdagar at noko er gjengs misforstått eller vanskeleg. Ein har sjølv sagt moglegheita til å «rope» alle inn til ei fellesøkt i fellesteamet til klassen på Teams, men av praktiske grunnar vert det ikkje nytta. Det tek rett og slett for mykje tid å komma seg rundt i grupperomma og snakka med gruppene enkeltvis. Det får heller ikkje den same spontane og uhøgtidlege forma. Det følast mykje meir offisielt, og terskelen for å gjera det er

mykje høgare for meg enn det er å samla merksemda til alle i klasserommet for ei lita fellesøkt.

Då eg gjekk fysisk rundt i klasserommet snakka eg mykje kortare med kvar gruppe, men mykje oftare. Eg kunne også stå tilsynelatande passiv og berre lytte til diskusjonar, og blande meg inn der eg syns det var naudsynt. Det var også lettare for ei gruppe å signalisere at dei trengte hjelp eller ville diskutere, og terskelen for å ta kontakt er lågare begge vegar – både for kadettane og for meg som lærar. Eg opplevde ein gong på Teams å kome til siste gruppe, og då hadde dei sete fast på eit av dagens første spørsmål heile økta utan å koma nokon veg. Dei hadde ikkje signalisert at dei trengde hjelp, og eg hadde tilfeldigvis dei sist på lista mi den dagen.<sup>2</sup> Dette hadde ikkje skjedd i eit fysisk klasserom, då hadde eg fanga opp usikkerheita/passiviteten/diskusjonen deira, og gått bort for å spørja. Det kjennast også som om eg forstyrerar gruppene ved å kome innom og avbryte dei for ofte på Teams. I klasserommet får gruppa visuelt signal om at eg er på veg, og «forstyrringa» vert meir naturleg. På Teams er eg der berre plutselig, midt i ei samtale, som ikkje alltid handlar om fag heller. Det kan kanskje opplevast på grensa til invaderande i nokre tilfelle. Som eit sidenotat til dette; på Teams har eg ingen kontroll eller moglegheit til å vera «vaktbikkje» og passa på at økta går med til (mest) fag og lite snakk om fotball, Valkyrien og andre utanomfaglege ting.

Det er også ei utfordring å fanga opp kven som er «sterk» og «svak» i faget. Også her er min påstand at det klarar ein betre når ein får møte klassen ansikt til ansikt. Virtuelt er det slik at nokon tør å snakka mykje, mens andre ikkje gjer det. Det treng ikkje å henga saman med om ein er fagleg sterk eller ikkje. Men når ein treff kadettane fysisk får ein meir informasjon enn om dei har tale-sjølvtillit, mellom anna kan ein sjå kva dei skriv i bøkene sine (korleis dei ligg an matematisk), og korleis dei snakkar seg imellom når eg som lærar ikkje er ein del av samtalen. No er mitt einaste mål på dette korleis kadettane gjer det på lesequiz og emnequiz. Det blir difor ekstra utfordrande å tilby meir oppfølging til dei som treng det. Eit slikt tilbod måtte difor gått ut til alle i klassen generelt, og det blei opp til den enkelte å oppsøka tilbodet. Mi avgrensa erfaring seier meg at det ikkje naudsyntvis er dei som har mest bruk for ekstra hjelp som oppsøker den.

Virtuelt krev det utruleg mykje meir, både tid og energi<sup>3</sup>, å få snakka med alle gruppene. Eg vil anslå at eg snakkar med kvar gruppe ein eller to gongar pr. undervisingsøkt, og nokre gongar gjerne 20-30 minutt om gongen. Det har fleire årsaker. Det første er at samtalar i grupper virtuelt er meir plundrete. Ein snakkar oppå kvarandre, må ofte gjenta, og samtalane flyt generelt mindre naturleg på skjerm. Det andre er at det gjerne tek tid dersom ein vil teikna og forklara noko. Mykje meir tid enn å låna ein blyant<sup>4</sup> og skrible litt i ei bok, eller berre studera ein figur som kadettane allereie har teikna i boka si, og peika og forklara ut i frå den.

---

<sup>2</sup> *Eg prøver å variere rekkefølga for besøk i gruppene frå gong til gong.*

<sup>3</sup> *Eg har aldri vore så sliten etter undervising som eg er etter virtuell undervising!*

<sup>4</sup> *Kanskje tida der vi kunne låna blyantar av kvarandre er heilt forbi no?*

Til sist så sparer gruppene gjerne opp spørsmål til du kjem, slik at det blir mykje å diskutera når eg først er innom.

Til sist opplever eg noko eg syns er fascinerande. Når eg går ut av eit virtuelt grupperom, er det som om minnet om det eg nettopp har snakka om, men mest av alt *kven* det var eg snakka med, vert sletta. Det skjer *ikkje* i eit fysisk rom, og eg trur det er fordi ein har fleire sansar i sving då. I det virtuelle rommet brukar eg aller mest høyrsele min. Ofte møter eg ei gruppe som ser på eit felles dokument, slik at videoen av kvar kadett er minimert i biletet. Sleng på at vi har PC-ar med små skjermar, og den visuelle sansen min er så å seia totalt avslått. Dersom dei ikkje «deler skjerm» (som det heiter), og eg faktisk ser video av kadettane på skjermen min, så er det likevel vanskelegare å sjå på 4-6 levande bilete enn det er å samhandla med ei gruppe på 4-6 personar i røynda. Eg veit ikkje kvifor det er slik, men sannsynlegvis er hjernane våre utvikla for å takla å visuelt veksla mellom personar i røynda, men ikkje på ein flat skjerm. Dei kroppslege og romlege sansane er også inaktive, for stort sett sit eg i ro i stolen min mens eg snakkar og lyttar. Min høgst uhøgtidlege, ufaglærte teori er at ved å aktivere færre sansar samstundes, så får samtala mykje færre sjansar til å kodast frå korttidsminnet til langtidsminnet. Det fører til at eg ikkje veit *kven* eg har snakka med om kva når timen er slutt, og også til at det blir vanskelegare for meg å halda oversikt over kva mange strevar med, og kva som ville vore naturleg å snakka om i plenum. Kvifor korttidsminnet vert meir eller mindre sletta umiddelbart når eg avsluttar ei samtale, det veit eg ikkje. For å motverka dette tek eg ofte stikkord til samtalane eg har.

## MINE REFLEKSJONAR KNYTT TIL UNDERVISINGS- OPPLEGGET OG LÆRING I FAGET

Eg trur vi har fått til mykje bra i oppbygginga av eit undervisningsopplegg som kan fungera. Fleire ting kan også forbeholdast i framtida.

Fleire kadettar har gitt uttrykk for at dei ønskjer førelesingar. Nokon har ønskt at faget skal undervisast heilt tradisjonelt, medan andre har ytra ønskje om videoførelesingar til førebuing, og andre igjen ønskjer å supplera dagens opplegg med små plenumsførelesingar i undervisingsøkta. Det kan vera noko i dette. Ved andre gongs gjennomkøyring av faget er noko av det teke omsyn til. Vi har mellom anna starta å laga små videoar til delar av pensum, meint som supplement til lesinga når kadettane skal førebu seg til timen. I tillegg har vi ei lita plenumsøkt etter lesequizzen der lærar<sup>5</sup> snakkar litt om dagens pensum.

Noko forskning støtter opp om at det fremjar læringa at klassen har fellessamlingar i undervisingsøkta. Desse kan vera oppklarande for kadettane om det er ting som har vore vanskeleg for mange, eller kan brukast for å gje utfyllande eller utdjupe

---

<sup>5</sup> *Vi er to denne gongen også.*

teori som ikkje var inkludert i førebuingane. På den andre sida er gruppearbeid med medstudentar vist å ha noko av den same effekten (Lo & Hew, 2019). Eg er derimot i stuss om kor nyttig det er når det skjer digitalt, spesielt når kadettane har avslått kamera og gjer liten respons på det som vert sagt. Den diskusjonen har dei fleste institusjonar for høgare utdanning hatt gåande under heile pandemien, så eg brukar ikkje plass på det her også<sup>6</sup>.

Det eg trur vi bør forsøka å bli betre på i framtida, er å gje meir tilbakemeldingar til kadettane. Det er vist å vera ein av dei viktigaste faktorane for å motivera for læring (sjå t.d. (Ludvigsen, 2020) og vidare referansar). Vi kunne nok ha utnytta både lesequizane og emnequizane til å gje formative tilbakemeldingar, altså – utnytta testsvara til kvar einskild for læring. Kva har du svart her, og kvifor? Kva tenkte du, og kva har du tenkt rett og feil? Og ikkje minst – kva er det mange syns er vanskeleg? Og til sist – få tilbakemeldingar på gruppeoppgåvene, som vi la ned mykje tid i å utarbeida. Våren 2021 har eg fleire gongar blitt spurt om fasit til desse oppgåvene. Eg tolkar det dit at gruppene føler ikkje dei får nok tilbakemelding på om dei har tenkt rett eller feil berre ved samtale med lærar i økta. Vi formulerte i utgangspunktet oppgåvene for å skapa diskusjon i gruppene, og tenkte ikkje på at det skulle vera behov for ein fasit. I klasserommet kom det heilt naturleg at ein fekk gitt tilbakemelding på oppgåvene. Ved andre gongs gjennomkøring, der vi aldri har møtt klassen fysisk, så opplever kadettane det som eit større problem enn sist.

Vi valde å endra eksamensforma til munnleg eksamen, og det trur eg var eit riktig steg i retning av *vurdering for læring*. Munnleg eksamen var eit sterkt insentiv for å jobba saman med gruppeoppgåvene kvar økt, då vi varsla tidleg etter at avgjerda vart teken at eksamensspørsmåla kom til å ligga tett opptil gruppeoppgåvene. Det er noko eg vil fortsetja med, også etter korona. Resultata frå eksamen våren 2020 var også svært gode, med ingen strykkarakterar og overvekt av A og B. Det som var fint var at mappekarakteren i faget var ein indikator for korleis eksamenskarakteren til kadettane blei, noko eg tolkar som at mappa målar læring undervegs. Så kan ein, igjen, diskutera korleis elementa i mappa kan brukast for at kvar einskild kan læra meir, og til slutt gjera det betre på eksamen enn mappa «spår».

Ein kjem ikkje forbi at fysikkfaget inneheld mange lovar uttrykt på matematisk vis, og at det ligg mykje forståing i å kunne bruke og manipulera formlane. Det er difor tradisjonelt brukt mykje tid på å gjera rekneoppgåver i fysikkfaget. I Sensorsystemer har vi hatt ein skriftleg prøve med klassiske rekneoppgåver. Som øving til den har det vore rekneoppgåver på framdriftsplanen, men også litt rekneoppgåver på emnequizane. Totalt har det vore brukt mindre tid på dette i øktene enn eg ville gjort for ein ingeniørklasse. Eg har opplevd denne delen av faget som god og passe stor for SMN, som ikkje treng inngåande kompetanse i å rekna fysikk når dei kjem ut i jobb.

---

<sup>6</sup> Sjå mellom anna <https://khrono.no/svarte-skjermer-i-digitale-undervisningsrom/482814> for eit lærarperspektiv, og <https://www.vg.no/nyheter/innenriks/i/1Bq91X/datatilsynet-advarer-mot-negative-konsekvenser-for-elever-og-studenter-for-eit-student-og-personvernsperspektiv>.

## KONKLUSJON

Sensorsystemer er eit fag som inneheld mange konsept (Forsvarets høgskole, 2018), og tida til undervising er knapp. Det er spesielt utfordrande no fordi det ikkje lenger er krav om at kadettane på SMN har fysikk frå vidaregåande skule (Forsvarets høgskole, 2021). Våren 2020 fekk vi litt ekstra tid, og denne blei brukt til repetisjon og mogningstid for kadettane. Å koma gjennom heile pensum på normert tid gjer at ein må anten gå mindre i djupna på pensum, eller krevja at kadettane arbeider meir på eigenhand. Kva som er det rette å gjera er eg ikkje sikker på, men dersom meir av ansvaret for læringa skal leggjast over i kadettane si tid (som eg veit er ein knapp ressurs for dei), så må i alle fall både førebuingmaterialet deira og tida brukt saman i øktene vera optimalisert. Å leggja opp til ein variant av TBL vart gjort i forsøk på å auka kadettane si læring på den knappe tida som er til rådighet.

Så får eg avslutningsvis berre beklaga til kadettane som les dette og kanskje kjenner seg som prøvekaninar. Trøysta får vera at det ser ut til at undervisningsform har ganske liten effekt på læring i gjennomsnitt. Den faktoren som påverkar læring mest ser ut til å vera oppmøte, og det er heldigvis ikkje eit problem på Sjøkrigsskolen (verken fysisk eller digitalt). Så er det sjølvsagt ikkje oppmøtet i seg sjølv som fører til læring, men dei oppgåvene ein student utfører anten før, under eller etter timen.

Som lærar tar eg med meg dette vidare; mi oppgåve er å finne den kombinasjonen av læringsaktivitetar som:

- Gjer at studentane kjem gjennom pensum, og ser samanhengane
- Skapar lyst til å læra og motivasjon for å jobba
- Gjer at arbeidsmengda og progresjonen kjennast overkommeleg/tilpassa storleiken på faget
- Utfordrar studentane der dei er
- Gjer at studentane får tilbakemelding på det dei gjer

Så vil tida visa om eg får det til!

## REFERANSAR

Forsvarets høgskole (2018). *Utdanning ved Forsvarets høgskole*. Henta frå ING2316 Sensorsystemer, emneplan: <https://utdanning.forsvaret.no/nb/emne/ING2316/540>

Forsvarets høgskole (2021). *Utdanning ved Forsvarets høgskole*. Henta frå Bachelor i militære studier med fordypning i ledelse - Sjømakt og militær navigasjon: <https://utdanning.forsvaret.no/nb/program/bachelor-i-militære-studier-med-fordypning-i-ledelse-navigasjon-og-sjømakt>

Lo, C. K., & Hew, K. F. (2019). The impact of flipped classrooms on student achievement in engineering education: A meta-analysis of 10 years of research. *Journal of Engineering Education*, 108(4), s. 523-546.

Ludvigsen, K. (2020). *Creating Spaces for Formative Feedback in Lectures*.

Bergen: University of Bergen.

Raaheim, A. (2018). Læring og undervisning. Foredrag ved Sjøkrigsskolen, 7.3.2018.

Team-Based Learning Collaborative. (2021). *Team-Based Learning Collaborative*. Henta frå <http://www.teambasedlearning.org>



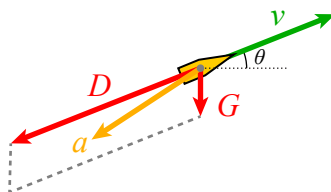
---

# Ballistikk på Sjøkrigsskolen fra 2012 til 2018 – hvordan og hvorfor

*Undervisning i matematikk, fysikk  
og programmering under ett, med  
ballistikk som rød tråd*

Harald Totland og Christophe Massacand  
Seksjon for sjømilitær teknologi, FHS Sjøkrigsskolen

Ballistikk ble i 2012 opprettet som et eget emne på linjen for Operative maritime jegeroperasjoner (OMJ) ved Sjøkrigsskolen. Et lignende fag hadde da ikke blitt undervist i noen særlig dybde siden 1980-tallet, da emnet Artillerilære ble nedlagt. Med tanke på at behovet for offiserer med kunnskap i ballistikk har vært en av grunnene for opprettelsen av militærakademier historisk sett, var det ikke unaturlig at emnet kom på timeplanen igjen. Imidlertid forsvant emnet igjen seks år senere som følge av at OMJ-linjen ble nedlagt i forbindelse med utdanningsreformen i Forsvaret.



## BAKGRUNN

Foranledningen til at faget gjenoppsto i 2012, var at daværende kadett Kjartan Myge i 2009-2012-kullet på OMJ-linjen hadde lagt merke til at mye av hans pensum i fysikk og matematikk er sentralt i beregningen av realistiske prosjekttilbaner. Etter forslag og mange verdifulle innspill fra ham ble emnene *Matematikk 1* og *Fysikk* (8 studiepoeng hver) erstattet av det ene emnet *Ballistikk* (15 stp.), og emnene *Matematikk 2* og *Sensorteori* (5 stp. hver) i det påfølgende semesteret ble erstattet av emnet *Sensorteori og samband* (10 stp.). Forfatterne av denne artikkelen sto for arbeidet med å utarbeide de to nye emnene, som sammen utgjorde emnegruppen Våpen- og sensorfysikk. Vi beholdt de delene av det gamle pensumet som var nødvendige for å nå målene i de nye emnene, og dét viste seg å være mesteparten. Noe ble sløffet, og noe ble lagt til, spesielt en modul om datakommunikasjon i sistnevnte emne. Vi vil her dele våre erfaringer fra emnet *Ballistikk*. Mange av de mer generelle kommentarene gjelder imidlertid også for emnet *Sensorteori og samband*.

## HENSIKT

Formålet med det nye emnet var på mange måter som tidligere. Emneplanen for *Ballistikk* [1] nevner blant annet at kadettene skal gis «kunnskaper i fysikk og matematikk som grunnlag for å forstå teknisk utstyr og fysiske omgivelser, og for å kunne kommunisere ved hjelp av realfaglige begreper», samt «ferdigheter i fysikk og matematikk som verktøy for å kunne angripe praktiske utfordringer, basert på systematisk resonnement og grunnleggende sammenhenger», i tillegg til at emnet danner «et realfaglig grunnlag for emnet *Sensorteori og samband* og for eventuell videreutdanning». Dette kunne i seg selv ha vært tilstrekkelig mange gode hensikter, men to punkter handlet om et nytt delmål, nemlig å gi kadettene «realfaglige kunnskaper i ballistikk, som en relevant anvendelse og rød tråd gjennom hele emnet», og «et grunnlag for å forstå skytevåpens virkemåte, muligheter og begrensninger».

## FORUTSETNINGER

Også studentenes muligheter og begrensninger må det naturligvis tas hensyn til. Her varierte utgangspunktet fra full fordypning i matematikk og fysikk i videregående skole, til svært begrenset tidligere befatning med slike fag. Det ble derfor ikke forutsatt noen forkunnskaper, noe også kadettene med gode forkunnskaper satte pris på, siden denne kunnskapen for deres del hadde ligget ubrukt i flere år. Mye av pensum dekkes av lærebøker i matematikk og fysikk for Forkurs til ingeniørutdanning, som begynner omtrent på null, men som samtidig er ganske omfattende. Rene ballistikk-bøker, derimot, forutsetter som regel visse kunnskaper i matematikk og fysikk, og er generelt på et for høyt nivå [2–4]. Lærebøkene ble derfor i utstrakt grad supplert med våre egne notater og tilhørende oppgaver, og delvis med stoff fra kompendier på Krigsskolen [5, 6].

## NYE METODER

Omleggingen innebar tre hovedendringer. Den ene var at undervisning i matematikk og fysikk ble flettet sammen. (Med «fysikk» menes i dette emnet først og fremst dynamikken til punktmasser.) En slik tilnærming gir åpenbare fordeler for innlæringen av begge fag. Nye matematiske begreper og sammenhenger blir innført i en relevant kontekst der de straks kan eksemplifiseres, og der det er satt av tilstrekkelig tid til anvendelser. For fysikkens del er det positivt at anvendelsene kommer raskt nok til at matematikken som trengs, ikke allerede er glemt.

Den andre hovedendringen besto i at problemstillinger fra ballistikk hele veien sto sentralt i bruken av matematikk og fysikk. Dette utelukket imidlertid ikke bruk av andre typer eksempler og oppgaver – matematikken og fysikken det handler om er så pass generell at det ville være galt ikke å vise noe av bredden i anvendelsesområdene.

Den tredje hovedendringen tvang seg fram fra noen av læringsutbyttebeskrivelsene: Kadettene skulle sitte igjen med forståelse av «dynamikken til et prosjektil gjennom hele dets bevegelse, samt virkninger ved nedslag», «prinsippene bak og virkemåten til en ballistisk kalkulator», og kunne «anvende matematikk og fysikk til å løse enkle praktiske problemer innen indreballistikk, ytreballistikk og terminalballistikk». Særlig når det gjelder ytreballistikk kommer man til kort med håndregning og vanlig kalkulator dersom luftmotstand skal inkluderes. Riktignok er standard matematikk og fysikk fra videregående skole tilstrekkelig til å *sette opp* ligningene som må løses for å beregne en realistisk prosjektilbane, men for å *løse* ligningene trengs det numeriske metoder. Programmering ble derfor tatt med som en av ingrediensene i det nye emnet.

## DIGITALE VERKTØY

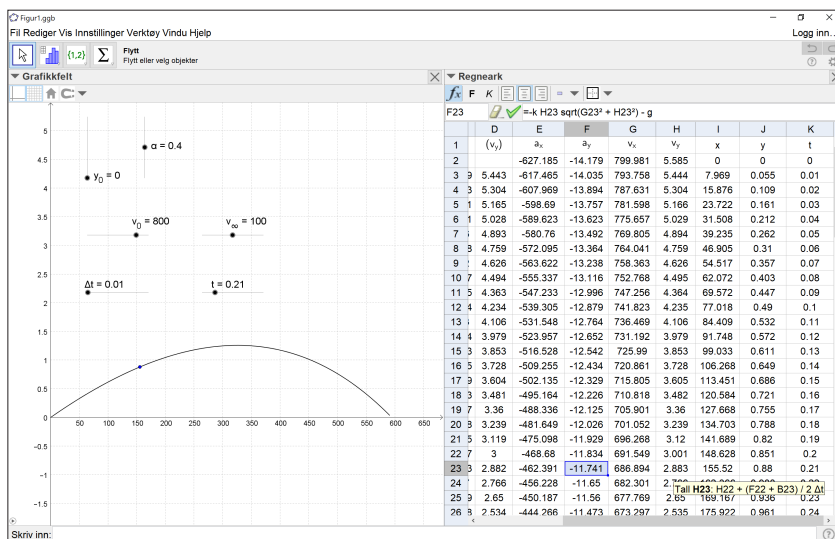
Målet med programmeringen var at kadettene selv skulle utvikle sin egen ballistiske kalkulator – ikke en som tar hensyn til *alle* effekter, men som er noenlunde realistisk. Nærmere bestemt skal en slik kalkulator ta hensyn til luftmotstand og eventuell vind, den skal være basert på grunnleggende fysiske prinsipper, og den skal foreta en rimelig nøyaktig beregning av prosjektilbanen.

Programmeringen kunne ha blitt utført i et tradisjonelt programmeringsspråk, men vi ønsket isteden å bruke programvare for dynamisk geometri. Her kan parametere eller geometriske forhold endres direkte i vinduet som viser et geometrisk objekt (f.eks. en prosjektilbane), og effekten er synlig umiddelbart. Valget falt på GeoGebra, som har relativt lav inngangsterskel, men som samtidig er ganske allsidig. Programmet inneholder også et regneark, hvor de numeriske beregningene kan gjennomføres (se Figur 1).

Å utføre numeriske beregninger i et regneark istedenfor med vanlig programmering gjør visse ting enklere. Istedenfor at variabler må defineres og deres verdier beregnes i løkker, alt med en spesiell syntaks, er variablene bare celler, verdiene blir beregnet ved hjelp av innholdet i nærliggende celler, og alle verdier er synlige.

GeoGebra ble tatt i bruk av kadettene allerede etter et par uker og brukt gjennom hele semesteret. Programmet egner seg godt til visualisering av sammenhenger i både matematikk og fysikk, og i vårt tilfelle gjaldt det så godt som hele pensum.

Ved siden av lærebøkene er alt lærestoff samlet i et stort digitalt kompendium i OneNote som dekker hele pensum, og som inneholder håndskrevne notater, trykt undervisningsmaterieell, oppgaver, animasjoner og lenker.



Figur 1. Prosjekttilbane beregnet i GeoGebra 5. Parametere, f.eks. utgangsfart  $v_0$  og terminalfart  $v_{\infty}$ , kan endres gradvis ved hjelp av gliderne. Cellene i regnearket inneholder verdien til ulike fysiske størrelser knyttet til prosjektilet på forskjellige punkter i banen. Beregningen fra et tidspunkt til neste foregår rad for rad nedover, med koordinater og farts- og akselerasjonskomponenter i kolonnene bortover. Her er det brukt omkring hundre tidspunkter. De to formlene viser utregningen av verdien i to celler i rad 23.

## INNHOOLD OG OPPLEGG

Ballistikk viser seg å være riktig så egnet som gjennomgangstema for matematikk og fysikk. Ikke bare er det stort overlapp mellom hva som trengs i ballistikk og hva som er standardemner i matematikk og fysikk. Også den vanlige inndelingen i indreballistikk, ytreballistikk og terminalballistikk passer utmerket med en naturlig progresjon i undervisningen.

Emnet startet imidlertid med en modul med grunnleggende matematikk: algebra, lineære funksjoner, trigonometri og vektorregning. Fra fysikk ble krefter tatt med for å kunne brukes som konkretisering av vektor og vektorsum.

*Indreballistikk* handler om den første delen av prosjektilets bevegelse, dvs. gjennom løpet. Da dette er en rettlinjert bevegelse, passer den som ramme for innføring i rettlinjert kinematikk, innledningsvis med konstant fart og så med konstant akselerasjon. Den påfølgende dynamikken omfatter Newtons lover, arbeid og kinetisk

energi, kruttenergi og virkningsgrad, impuls, bevegelsesmengde og rekyl, alt med konstante krefter i første omgang.

Derivasjon og integrasjon passer også inn under overskriften indreballistikk, og muliggjør en mer generell behandling av punktene ovenfor. Et eksempel er integrasjon av trykkurver (trykk mot prosjektilet som funksjon av dets posisjon i løpet) til å beregne arbeid og derav kinetisk energi og fart.

I og med at alle har et naturlig forhold til fart, og personlig erfaring med sammenhengen mellom fart, forflytning, posisjon og tid, er disse størrelsene spesielt velegnet som utgangspunkt for å forstå betydningen av begrepene derivert og integral. Et slikt utgangspunkt er naturlig og nærliggende i et emne som *Ballistikk*, der disse størrelsene spiller noen av hovedrollene, og der det er lagt vekt på en tverrfaglig tilnæringsmåte i undervisningen. Men også i matematikkundervisning ellers kan selve derivasjonsbegrepet og integrasjonsbegrepet med fordel innarbeides ved hjelp av disse størrelsene, og deretter ved hjelp av andre størrelser med praktisk tilknytning, i god tid før man tar for seg den formelle definisjonen og de vanlige regnereglene. Derivasjon handler jo om vekstfart, og det finnes neppe noe mer velkjent og dagligdags eksempel på det enn vanlig fart.

Det ble lagt lite vekt på derivasjons- og integrasjonsregler; vi begrenset oss til potensfunksjoner og summen av slike (altså inkludert polynomer), da dette er tilstrekkelig for å vise alle ønskede anvendelser, og fordi kunnskap om de vanlige derivasjons- og integrasjonsteknikkene ikke ble vurdert som noen viktig ferdighet for disse studentene. Ved behov kunne de bruke kalkulator eller datamaskin. Isteden la vi mer vekt på numerisk beregning av integraler, da dette for det første bygger opp under forståelsen av hva integrasjon handler om, og for det andre er en forberedelse til senere numerisk løsning av differensialligninger.

*Ytreballistikk* handler om prosjektilets bevegelse fra det forlater løpet og til nedslag, altså den ballistiske banen. Dynamikken her er naturligvis mer komplisert enn i indreballistikk, ettersom bevegelsen er krumlinjet og kreftene kontinuerlig endrer både verdi og retning. Som oppvarming brukte vi to tilfeller som også kan løses analytisk, nemlig loddrett kast med luftmotstand og skrått kast uten luftmotstand. De analytiske løsningene fungerer som fasit, slik at det er mulig å studere hvordan nøyaktigheten til den numeriske løsningen avhenger av løsningsmetode, størrelsen på tidsintervallet  $\Delta t$  som prosjekttilbanen deles opp i, forholdet mellom luftmotstand og tyngde, osv. Sistnevnte tilfelle ble også studert for sin egen del, da det ofte er hensiktsmessig å neglisjere luftmotstanden, for eksempel ved kast av håndgranat. Til slutt utviklet kadettene hver sin ballistiske kalkulator, i form av en animasjon i GeoGebra, der man kan stille inn prosjekttilmasse, kaliber, dragkoeffisient, utgangsfart og elevasjonsvinkel, og observere direkte hvordan en gradvis endring av disse parameterne påvirker prosjekttilbanen. Senere ble animasjonen utvidet med mulighet for å inkludere vind, terrengvinkel og beregning av treffpunkt og/eller nedslagspunkt. Også sidevind kan behandles med de samme metodene, og prosjekttilbanen fremstilles i GeoGebra's 3D-vindu. Et eksempel på en problemstilling som ble undersøkt, er hvordan siktet skal justeres ved skyting i skrått terreng – er den såkalte *riflemans rule* riktig, eller finnes det bedre måter å gjøre det på [2]? Andre ytreballistiske deltemaer var spinn, corioliseffekter og ballistisk koeffisient.

*Terminalballistikk* handler om prosjektillets virkning ved nedslag. Her holdt vi oss til temaer som kan benyttes som eksempler på bruk av sannsynlighetsregning: treffsannsynlighet, ødeleggelsessannsynlighet, sårbarhetsanalyse og forventet ammunisjonsbruk. Alle standardemner innen grunnleggende sannsynlighetsregning finnes det relevante anvendelser av i terminalballistikk.

## EVALUERINGSFORMER

Eksamen var skriftlig, med bare kalkulator og formelsamling som tillatte hjelpemidler. I tillegg hadde emnet en mappe (med vekt 30 %) bestående av to prøver og to innleveringer. Programmeringsferdighetene og kunnskap om numeriske beregninger ble hovedsakelig vurdert på grunnlag av innleveringene, hvorav den siste blant annet besto av den ballistiske kalkulatoren.

## ERFARINGER OG DISKUSJON

Emner som kombinerer undervisning i matematikk og fysikk, er ikke vanlige, til tross for at begge fag drar stor nytte av en slik samkjøring. Dette gjensidige nytteforholdet er ikke overraskende, men egentlig bare en gjenspeiling av at mye av standardmatematikken ble utviklet nettopp for å løse vanlige problemer fra fysikk. Emnet vi har beskrevet i denne artikkelen, er et eksempel på en slik fusjon, med et tilleggselement i form av hovedtemaet ballistikk. Digitale hjelpemidler har vært brukt både for visualiseringens skyld, for å lære enkel programmering, og for å nå et bestemt mål – utviklingen av en ballistisk kalkulator.

Etter å ha gjennomført emnet for fire kull, er vår konklusjon at opplegget har fungert etter hensikten. Mange av kadettene har startet omtrent uten forkunnskaper i matematikk og fysikk, men likevel har alle i løpet av ett semester blitt i stand til, eksempelvis, å forstå hvordan Newtons 2. lov gir opphav til ligningene som beskriver en prosjektilbane,

$$\frac{dv_x}{dt} = -kv_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \frac{dv_y}{dt} = -g - kv_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

og løse disse ikke-lineære differensialligningene numerisk.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Ligningene slik de er vist her, gjelder en modell der luftmotstanden er proporsjonal med kvadratet av farten; dersom luftmotstanden er proporsjonal med  $v^n$ , erstattes kvadratrøttene av  $(\dots)^{(n-1)/2}$ . Kadettene løser differensialligningene ved hjelp av den modifiserte Euler-metoden, altså en andreordens Runge-Kutta-metode. Fra fartskomponentene beregnes prosjektilkoordinatene  $x$  og  $y$  ved de forskjellige tidspunktene.

Kadettene selv har vært arbeidsomme og innsatsvillige, men graden av motivasjon og entusiasme har variert. Det er særlig når vanskelighetsgraden bygger seg opp utover i emnet, og før det er tid for å høste fruktene av alt strev, at enkelte uttrykker frustrasjon over programmerings krav til detaljfokus (og, med god grunn, GeoGebras litt for hyppige krasj), istedenfor tilfredshet over å klare å lage de forskjellige animasjonene. Da er heller ikke veien lang til tanker om at alt sammen er ting som en fint kunne klare seg uten. Men det er et faktum at matematikk, fysikk og programmering krever en viss modningstid, før slit og frustrasjon erstattes av mestring og moro. For manges del var *Ballistikk* det første harde møtet med realfag, men etter dette krevende løpet opplevdes det påfølgende emnet *Sensorteori og samband* som betydelig lettere.

En diskusjon om hva man kunne klart seg uten, kan lett bli til et spørsmål om hvor lite man egentlig kan klare seg med. Omvendt kan man spørre hvilket læringsutbytte dette emnet gir. Den tilsluttede nytteverdien framgår av emneplanen og er delvis gjengitt ovenfor. Blant læringsmålene er det kunnskap i ballistikk som er mest direkte nyttig for marinejegere og kystjegere. De mer overordnede momentene handler blant annet om innsikt i fysiske sammenhenger, fortrolighet med realfaglig terminologi og øvelse i systematisk resonnering; med andre ord forutsetninger for å forstå, å kommunisere og å ta avgjørelser som er basert på mer enn erfaring og magefølelse. Det er sant at i kritiske situasjoner kan magefølelsen være avgjørende. Men det å beskjeftige seg med krefter, geometri og sannsynlighet bidrar, på noen områder, til å utvikle denne magefølelsen og gi den et analytisk og faktabasert grunnlag.

Til slutt må det tilføyes at også OMJ-kadetter selv har argumentert for den operative betydningen av realfaglig kompetanse [7], og at flere av kadettene har hatt bruk for den realfaglige kunnskapen allerede noen semester senere i forbindelse med bacheloroppgaven.

På bakgrunn av erfaringene fra opplegget i emnet *Ballistikk* mener vi at lignende tverrfaglige emner bør utprøves også i andre fag. For at dette skal fungere godt, er det avgjørende med en høy grad av detaljplanlegging. Pensum må organiseres slik at flest mulig tema kommer i akkurat riktig øyeblikk. Forarbeidet krever altså mye tid, men også selve undervisningen kan være svært tidkrevende. Med digitale hjelpemidler og tynne forkunnskaper vil det oppstå hindringer på løpende bånd, noe som forutsetter mange timer på timeplanen og tett oppfølging.

Etter utdanningsreformen i Forsvaret [8,9] ble OMJ-linjen lagt ned, og de to emnene *Ballistikk* og *Sensorteori og samband* gikk med i dragsuget. OMJ-linjen ble erstattet av linjen Militærmakt og sikkerhetsoperasjoner. Kadettene der følger emnet *Sjømilitær teknologi 1* sammen med linjen Sjømakt og militær navigasjon (SMN). Dette emnet er opprettet spesielt for SMN-linjen, og de fleste delemnene er knyttet til navigasjon og skipsteknikk og danner grunnlag for senere SMN-emner. Vi kjenner ikke til noen analyse som tilsa at en slik løsning faglig sett var mer hensiktsmessig enn å beholde ett av eller begge de to skreddersydde OMJ-emnene.

## REFERANSER

- [1] Emneplan for RF2020 Ballistikk, Sjøkrigsskolen, 2012; i Fagplan for Sjøkrigsskolens bachelorprogram – Lederskap med fordypning i maritime jegeroperasjoner.
- [2] A.J. Pejsa, *Modern Practical Ballistics*, 2. utg., Kenwood Publ., 1991.
- [3] D.E. Carlucci, S.S. Jacobson, *Ballistics*, CRC Press, 2008.
- [4] R.L. McCoy, *Modern Exterior Ballistics*, Schiffer Publishing, 1999.
- [5] *Militærteknologi*, kompendium, Krigsskolen, 2011.
- [6] H. Holtane, *Skyting i skrått terreng*, rapport, Krigsskolen, 2010.
- [7] K. Myge, K.B. Tufte, fordypningsoppgave, Sjøkrigsskolen, 2012.
- [8] Prosjektmandat for utdanningsreformen, 24.01.2017.
- [9] Forsvarssjefens gjennomføringsplan for utdanningsreformen, 28.11.2017.



---

# NUSSE, EMMA, FREDERIC og GIER, oldefedrene til PC-en din

Ellen Margit Krätzig-Berle  
*Seksjon for sjømilitær teknologi, FHS Sjøkrigsskolen*

Jeg skal ikke nekte for at jeg irriterer meg over PC-en min til tider. Den er dyr, den er treg, og den gjør ikke alltid det jeg vil! Men etter å ha sett filmen «The Imitation Game» tenkte jeg at jeg hadde fint lite å klage over!



*The Bombe, The National Museum of Computing.*

Har *du* sett filmen? Da har du blitt kjent med den engelske matematikeren Alan Turings iherdige innsats for å overliste tyskernes kodemaskin ENIGMA under andre verdenskrig. Turing hadde allerede før krigen begynt å utvikle teoretiske datamaskiner, såkalte Turing-maskiner, men disse eksisterte bare på papiret. I filmen bygger Turing, med pengestøtte og offisiell velsignelse fra Winston Churchill, en kjempemaskin, som han gav navnet «Christopher». Men denne filmen baserer seg altså på en sann historie, og denne maskinen eksisterer i virkeligheten. Den ble kalt «The Bombe», og den står nå på The National Museum of Computing i Bletchley Park. Der ble den i sin tid også bygget, hovedsakelig av nettopp Turing, som pga. dette ble ansett som den moderne datamaskinens far.

Riktignok var ikke han den første som syslet med tanker om å bygge regnemaskiner. Men det fantes på denne tiden ikke noen ide om hva en datamaskin egentlig var. Ordet «Computer» brukte man på mennesker som fikk tildelt bestemte algoritmer og ble bedt om å utføre dem. Det Turing så for seg, var automatiske computere. Ideen var da å omgjøre en hvilken som helst informasjon til sifre som så kunne mates inn i maskinen og behandles. Hans maskiner skulle altså til en viss grad kunne «tenke logisk» [2].

Det ble etter hvert laget flere og bedre maskiner av samme slag som The Bombe, og deretter gikk utviklingen sin ubønnhørlige gang.

Den første digitale datamaskinen som kom til Norge, gikk til Norges eldste universitet, **Universitetet i Oslo**, i 1954. Den fikk det søte navnet NUSSE, som altså ikke betyr en nusselig liten sak, men er en forkortelse for «Norsk universell siffermaskin selvstyrt elektronisk». Og den ble faktisk bygget i Norge. Den startet for så vidt det norske eventyret med elektroniske datamaskiner, men maskinen selv var ikke noe særlig stabil. Det sies at den var særdeles ømfintlig for variasjoner i strømtilførselen. Når Christiania Spigerverk vridde på knappen til en av sine ovner, kunne NUSSE stoppe helt opp, fordi spenningsnivået endret seg. Den ble tatt ut av drift allerede i 1961 og står i dag ved Norsk Teknisk Museum.

Noen tekniske spesifikasjoner [5]:

- Inn- og utdata: hullbånd
- 32 bits ordlengde
- Minne: 512 ord (roterende trommel)
- Hastighet: 1-16 millisekunder pr. operasjon, eller ca. 500 addisjoner i sekundet.
- Kraftforbruk: 1,5 kW



NUSSE utstilt ved Norsk Teknisk Museum. Av Ukjent/Norsk Teknisk Museum. Lisens: CC BY NC SA 3.0

**Universitetet i Bergen, UiB**, ble grunnlagt i 1946 og fikk sin første elektroniske datamaskin i 1958, navnet var EMMA (Elektronisk Matematikk-Maskin). EMMA var en IBM650-maskin, og man kan si at det var den første masseproduserte maskinen med sine rundt 2000 eksemplarer. Den var selvfølgelig flittig brukt på universitetet, men ble også brukt til kommersielle formål som å beregne skatten. Maskinen brukte hullkort både for innmatingen av informasjon, og for resultatene. Noe slikt som en harddisk fantes ikke enda, ei heller skjermer.

Noen tekniske spesifikasjoner [4]:

- Arbeidet med hullkort (200 inn og 100 ut pr. min)
- Driftssikker. CPU basert på radorør.
- Ordlengthe: 10-siffrers desimaltall
- Sentrallager: Magnetdisktrommel med plass til 2000 tisifrede tall. Roterte 12 500 ganger pr. minutt.
- Ytelse: 1000 addisjoner/subtraksjoner og 60 multiplikasjoner pr. min.



*EMMA står i dag på Norsk Teknisk Museum. Sentralenheten til høyre, inn-ut-enheten i midten og hullkortsorterer til venstre. Bildet er fra Wikipedia.*

Og så en liten tankevekker: Da **Norges Handelshøyskole** i Bergen, NHH, på 60-tallet søkte om å få anskaffe en datamaskin, var svaret at det slettes ikke var nødvendig. De måtte vær så god finne seg i å dele med UiB.

Også NTH, **Norges tekniske høyskole**, som etter hvert ble til NTNU, i Trondheim fikk en elektronisk maskin, den ble bygget i København og ankom Trondheim høsten 1962. Også denne maskinen hadde selvfølgelig et navn, GIER, som er forkortelsen for Geodætisk Instituts Elektroniske Regnemaskine.



*Den første norske GIER-maskinen ankom Regnesenteret NTH i november 1962. På bordene ses fra venstre til høyre: spolemaskin for hullbånd, hullbåndleser (det ferdig leste båndet havner i søplebøtta før det blir spolt opp igjen), en samling hullbånd i en programkasse, en online-terminal (skrivemaskinen), start-/stopknappen og en hullbåndpunch. Selve maskinen er skapet ved veggen. Personen på bildet er Olav B. Brusdal. GIER og Olav B. Brusdal ved Regnesenteret NTH, ca. 1963. Av Ukjent/SINTEF Kommunikasjon. Lisens: Begrenset gjenbruk.*

Det var litt vanskelig å plassere denne maskinen på et sted der det var god nok lufting, for den utviklet ganske mye varme. Til slutt ble den satt rett foran et vindu, og det første punktet i brukerinstruksen var: Åpne vinduet!

Noen tekniske spesifikasjoner [1]:

- GIER er en av de første datamaskiner som er bygget med transistorer (det vanlige på den tiden var radiorør).
- Arbeidslageret: 1024 dataord, hvert ord hadde 42 bit.
- Lagring: Et trommelager på 12 800 dataord ble brukt som sekundærlager.

Også **Forsvaret** hev seg på datamaskinkarusellen, FFI fikk levert FREDERIC til sine lokaler på Kjeller allerede i 1957. Denne gangen er navnet ikke en forkortelse, men maskinen er oppkalt etter professor Frederic Calland Williams, som utviklet denne typen maskiner i Manchester. Den var en av datidens kraftigste maskiner

i Europa. Elektroniske datamaskiner i Forsvaret var selvfølgelig fremdeles meget viktig i forbindelse med kodeknekking, men blant mye annet ble den også brukt til å beregne den ideelle mengden muggsopp for tilsetningen i Jarlsberg-ost.

Noen tekniske spesifikasjoner [3]:

- Inn- og utdata: hullbånd
- 40 bits ordlengde
- Arbeidslager: 1024 ord (ferritt-minne)
- Sekundærlager: 16 384 ord (magnetisk trommel)
- Hastighet: 0,18 millisekund for addisjon og subtraksjon, 0,3 millisekund for multiplikasjon



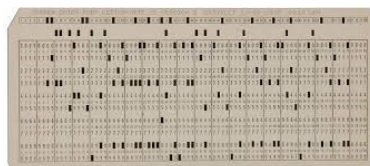
Detalj av innmaten til den elektroniske regnemaskinen FREDERIC. I midten av skapet ses den magnetiske trommel-hukommelsen. Fotografert på Kjeller, 25. mars 1966

På **Sjøkrigsskolen** holdt dataalderen antagelig sitt inntog sent på 70-tallet. Da Dagfinn Andreassen, som var dosent i EDB på SKSK og begynte sin lange lærergjerning der i 1980, kom til skolen, sto det en liten datamaskin bortgjemt på et laboratorium. Andreassen tror det var en ABC80 (Advanced BASIC Computer), produsert i Sverige. Om den ble brukt til noe, er uvisst. Andreassen kunne også fortelle at skolen hadde en betydelig pengesekk på 50 000 kroner klar til ham da han kom. Den brukte han til å kjøpe inn en Apple II med 48 kB RAM (maksimum), 2 diskettstasjoner, skjerm, skriver og PASCAL-system. Dermed var den pengesekken tom. SKSK var i 1985 veldig tidlig ute med etablering av et lokalnett, men det var ikke bare greit. For det første kunne ikke IBM levere nok kabler, slik at man til å begynne med bare fikk tilkoblet 7 av 14 oppsatte maskiner. For det andre tok nettverksprogramvaren såpass mye plass, at det ikke var praktisk mulig å kjøre nytteprogram på PC-ene før de fikk en dyr oppgradering fra 256 kB til hele 384 kB RAM.

Mitt første møte med datamaskiner var midt på 70-tallet, og jeg husker godt hvor mye bale det var med disse hullkortene. Først måtte de trykkes, og hver linje i programmet var ett kort, slik at et helt program kunne resultere i en anselig bunke. Så måtte man ta turen til huset



ABC80, Tekniska museet Stockholm





der maskinen sto (den hadde altså en hel bygning for seg selv) og mate inn bunken, for så å komme tilbake dagen derpå og hente resultatet. Som oftest hadde man feil i programmeringen (eller man hadde forbyttet noen kort). Da var det «bare» å finne feilen, og hele dansen begynte på nytt.



Nåtiden er utenkelig uten elektroniske datamaskiner, som vi bruker uhemmet og i alle mulige sammenhenger. Har du en APPLE-watch? Eller se på denne, en såkalt SoC System on a Chip, altså en komplett datamaskin med radiokommunikasjon (Blåtann, Ant, Zigbee), 196 kB flash (varig lager) og 24 kB RAM til en pris på ca. 40 NOK per stykk.



Når vi altså trekker tråden ifra den første datamaskinen i Oslo og frem til i dag, kan det slås fast at det er mye større datakraft i din mobiltelefon enn i NUSSE. Det kan du jo tenke på neste gang du irriterer deg over PC-en din.

## BIBLIOGRAFI:

- [1] Bratbergsengen, Kjell: GIER i *Store norske leksikon* på [snl.no](https://snl.no). Hentet 23. februar 2021 fra <https://snl.no/GIER>
- [2] Holvik, Martin: *Denne maskinen knekte de umulige kodene* på [tu.no](https://www.tu.no). Hentet 22. februar 2021 fra <https://www.tu.no/artikler/denne-maskinen-knekte-de-umulige-kodene/225357>
- [3] Nordal, Ola: *FREDERIC - datamaskin* i *Store norske leksikon* på [snl.no](https://snl.no). Hentet 23. februar 2021 fra [https://snl.no/FREDERIC\\_-\\_datamaskin](https://snl.no/FREDERIC_-_datamaskin)
- [4] Nordal, Ola: *EMMA - datamaskin* i *Store norske leksikon* på [snl.no](https://snl.no). Hentet 23. februar 2021 fra [https://snl.no/EMMA\\_-\\_datamaskin](https://snl.no/EMMA_-_datamaskin)
- [5] Nordal, Ola: *NUSSE* i *Store norske leksikon* på [snl.no](https://snl.no). Hentet 22. februar 2021 fra <https://snl.no/NUSSE>

<https://www.tu.no/artikler/denne-maskinen-knekte-de-umulige-kodene/225357>





---

2.

Sannsynlighetsregning  
og teknologi

---

---

# En introduksjon til sjøminenes matematikk

Knut Meen

*Seksjon for sjømilitær teknologi, FHS Sjøkrigsskolen*

Marinens Krigføringssenter, som driver med utdanning av «mine-krigere», har kjøpt matte-kurs av artikkelens forfatter de siste 20 årene. Intensjonen med artikkelen er å gi interesserte, både i og utenfor Forsvaret, et innblikk i hva «mine-matematikken» handler om, men også å gi en samlet presentasjon av den grunnleggende matematikken i forbindelse med både *trusselvurderinger av minefelt og søk etter miner*.

Trusselvurderinger og *minefeltsplanlegging* henger nøye sammen. Programmet *Mine Field Planning Programme 2010 (MPP2010)* er utviklet av Forsvarets Forskningsinstitutt, og det bygger på Otto Kristian Svordals bok *Mineinnsats i sjøkrigen*. Boken gir det teoretiske grunnlaget for minefeltsplanlegging, men med et minimum av forklaringer til matematikken

Mine-mottiltak, eller MCM (Mine Counter Measures), handler om søk etter miner. Forsvarets minerydderskvadron er i hovedsak opptatt med å finne sjøminere, og å fjerne slike. NATO-programmene DARE 2.1 og MCM EXPERT er utviklet for slike risikovurderinger som må foretas av de som driver med mine-søk. Det er ikke gitt *noen* matematiske begrunnelser i dokumentasjonen til disse programmene. Noe av matematikken er beskrevet i dokumentet MCM EXPERT Version 4.0. Planning and Evaluation Method. Dette er imidlertid klassifisert som NATO RESTRICTED. Det som blir presentert her, er kun basert på åpne kilder.

*Takk til redaktørene Ellen Berle og Harald Totland for gode innspill og korreksjoner.*

## 0. Litt om matematikken

To sannsynlighetsfordelinger som oppstår i forbindelse med uavhengige Bernoulli-forsøk, vil være viktige.

Et Bernoulli-forsøk har kun to utfall; *suksess* og *fiasko*. Sannsynligheten for suksess er  $p$ , og sannsynligheten for fiasko er  $1 - p$ . Dette kan gjentas som en serie med *uavhengige* forsøk.

Hvis forsøket gjentas  $M$  ganger (et bestemt antall), så er antall suksesser som inntreffer *binomisk fordelt* med parametere  $M$  og  $p$ .

Hvis forsøket gjentas helt til  $r$  suksesser er oppnådd, så er antall fiaskoer *negativ binomisk fordelt* med parametere  $r$  og  $p$ .

Disse sannsynlighetsfordelingene er tilgjengelige i Excel og på en teknisk lommeregner.

En uniform sannsynlighetsfordeling er når hver av de mulige utfall er like sannsynlige.

Det blir gitt forklaringer til Poisson-fordeling og Bayes' setning når vi kommer dit.

## 1. De ulike minetyper<sup>1</sup>

Klassifiseringen av miner kan starte med at man skiller mellom miner som ligger på havbunnen og miner som er ankret opp, og som befinner seg i en viss avstand fra overflaten. Disse to typene kalles gjerne for *bunnminer* og *forankrede miner*.

Miner blir også klassifisert etter utløsningsmekanismen. Man snakker da om *kontaktminer* og *influensminer*.

En kontaktmine blir utløst når et fartøy berører en sensor festet på minen. Slike miner er alltid forankrede, og ligger like under overflaten.

Det er i hovedsak tre typer av influensminer: *Magnetiske miner* registrer den magnetiske signaturen til et fartøy som passerer. *Akustiske miner* lytter på den «støyen» som et passerende fartøy gir fra seg. *Trykkminer* fanger opp den trykkendring som oppstår når et fartøy passerer. Alle disse kan være programmert til å sprenges overfor spesielle typer overflatefartøy.

Magnetiske og akustiske miner kan også være rettet mot undervannsbåter. Influensminer kan enten være bunnminer eller forankrede. Stigeminer og torpedominer er to spesielle typer, som vil «oppsoke» et fartøy som en slik mine oppdager.

En mine kan også være utstyrt med en *skipsteller*. Minen vil ikke gå av før det er registrert et gitt antall passeringer av den fartøystypen minen er beregnet på. Et skip må komme innenfor en viss distanse fra minen for å bli registrert. Denne distansen er gitt av minens konstruksjon. Den doble distansen kalles så minens *aktiveringsbredde*.

Minens *skadevidde* handler om minens evne til å påføre fartøyet en betydelig skade. Vi vil anta at aktiveringsbredden og skadevidden er den samme, og symbolet som blir brukt er  $w$ .

---

<sup>1</sup> Denne korte oppsummeringen er basert på [Naval mine - Wikipedia](#)

## 2. Trusselen av et minefelt

La oss tenke oss et minefelt plassert i et sund som er  $c$  meter bredt og  $l$  meter langt. Arealet av minefeltet er  $A = c \cdot l$  (kvadratmeter). Innenfor dette området er det plassert  $M$  miner tilfeldig, som illustrert i Figur 1.<sup>2</sup> Minene er uten skipstjellere, og alle har skadevidde  $w$  meter.

Et fartøy som setter kurs rett gjennom dette området, vil komme helskinnet gjennom dersom ingen miner ligger nærmere enn  $w/2$  meter fra seilingsruten. ( $w$  kan økes med fartøyets bredde.)

Fartøyet må seile midt i en kanal, som er  $l$  meter lang og  $w$  meter bred, og som er fri for miner. Arealet av denne kanalen er  $a = w \cdot l$ .

Sannsynligheten for at en tilfeldig plassert mine ligger *innenfor* kanalen er  $a/A = w/c$ . Sannsynligheten for at den ligger *utenfor* er  $1 - w/c$ . Sannsynligheten for at *alle* minene ligger utenfor kanalen er  $(1 - w/c)^n$ . Sannsynligheten for at *minst* én mine ligger *innenfor* kanalen,<sup>3</sup> og fartøyet vil kunne bli påført skade, er  $1 - (1 - w/c)^M$ .

Denne størrelsen kalles *minefeltets initialtrussel* eller SIT (Simple Initial Threat<sup>4</sup>):

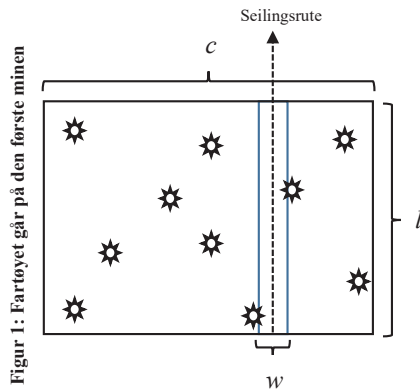
$$\text{SIT} = 1 - (1 - w/c)^M.$$

### Eksempel

Hvis 40 miner, med skadevidde lik 400 m, er plassert i innløpet til en fjord – hvor fjorden er 4 km bred, er initialtrusselen lik  $1 - (1 - 400/4000)^{40} = 0.9852 = 98.5\%$ .

Hvis antall miner  $M$  er bestemt av en sannsynlighetsfordeling, regnes trusselen ut som *forventet* SIT, og kalles *Risk*. Vi kommer tilbake til hvordan *Risk* regnes ut i et senere eksempel.

*Trussel-profilen* til et minefelt angir trusselen mot hver av de  $n$  neste fartøyene som forsøker å gå gjennom minefeltet. Dette er ikke helt triviell matematikk, fordi trusselen mot et fartøy må ta hensyn til hva som har skjedd med de forutgående fartøyer. Etter hvert som fartøyer går inn i et minefelt, eller det søkes etter miner, vil en Markov-kjede være en naturlig matematisk modell.<sup>5</sup> Vi lar imidlertid det ligge i denne artikkelen.



Figur 1: Fartøyet går på den første minen

<sup>2</sup> «Tilfeldig plassering» er nok ikke en helt realistisk forutsetning, men det ser man faktisk bort ifra i alle beregninger som involverer slike *områdefelt*. I et *sperrefelt* legges miner på en eller flere rekker tvers over sundet.

<sup>3</sup> Dette er altså sannsynligheten for at en binomisk fordelt variabel, med parametere  $M$  og  $w/c$ , er større enn null.

<sup>4</sup> Denne utledningen er gitt av Svortdal, som bruker «Begynnelsestrussel». Formelen blir utvidet til å gjelde for andre minefelttyper enn det områdefeltet som vi ser på, og det kan også tas hensyn til et annet bevegelsesmønster enn korteste rute gjennom feltet.

<sup>5</sup> Svortdal, side 94, gir en algoritme som gir en *tilnærmet* trussel-profil.

### 3. Søk etter miner

Minesøk foregår i prinsippet etter to ulike metoder, enten med sonar (*minejakt*) eller som sveip (*minesveip*).<sup>6</sup>

Ved minejakt blir sjøen og bunnen gjennomført med sonar. Forankrede miner er lett å oppdage, mens bunnminer kan være vanskeligere. Ofte er det minelignende gjenstander (steiner) på havbunnen som må undersøkes, og hvis en mistenkelig gjenstand faktisk er en mine, blir den sprengt. Da er det dykkere som må i aksjon, og prosessen er tidkrevende. Bunnforholdene kan også være av en slik karakter at miner ikke blir oppdaget med sonar. Miner kan ligge begravd i bunnslam (buried) eller være skjult av ruglete bunnprofil (cluttered).

Et minesveip kan enten være et *mekanisk sveip* – hvor man søker etter forankrede miner, eller et *influenssveip* – hvor man søker etter influensminer. En minesveiper sleper på utstyr, som enten kan kutte forankringen til minene eller simulere magnetiske og/eller akustiske signaler som kan utløse influensminer. Når sveipet passerer en mine, vil minen bli aktivert eller kuttet med en viss sannsynlighet  $p$  – som vi med en fellesbetegnelse vil kalle *deteksjonssannsynligheten*. Ved et magnetisk søk vil akustiske miner ikke bli aktivert, og omvendt – magnetiske miner blir ikke aktivert med et akustisk sveip. Man kan gjennomføre kombinerte influenssveip.

### 4. Normalfunksjoner

Et fartøy som passerer en mine i en viss horisontal avstand  $x$ , vil oppdage eller utløse (aktivere) minen med en viss sannsynlighet  $p(x)$ . Funksjonen  $p(x)$  kalles *minens normalfunksjon*.

Hvis minen ligger på fartøyets babord side, er  $x < 0$ , og hvis minen ligger på fartøyets styrbord side, er  $x > 0$ . Ofte er *normalfunksjonen* en symmetrisk funksjon, dvs.  $p(-x) = p(x)$ .

Det er flere ulike situasjoner som nå vil bli behandlet under ett.

Fartøyet kan enten være et av minens målfartøy eller det kan være en minesveiper som utfører et sveip, det kan være et akustisk sveip, et magnetisk sveip eller et kombinert sveip. I så fall kalles  $p(x)$  for *normalfunksjonen for fyring*.

Det kan være en minesveiper som utfører et mekanisk sveip etter forankrede miner, og da er  $p(x)$  *normalfunksjonen for kutting*.

Eller det kan være en minejakt med sonar, og da er  $p(x)$  *normalfunksjonen for deteksjon*.

Grafen til en normalfunksjon vil kunne se ut som den blå kurven i Figur 2.

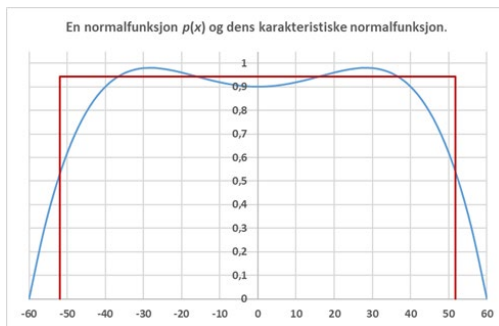
Som et eksempel kan vi tenke oss at dette handler om et akustisk sveip.

Hvis en mine ligger rett under sveiperen, er fyringssannsynligheten (aktiveringssannsynligheten) lik 0.9.

En mine som ligger 30 meter til side for sveiperen, fyres (aktiveres) med  $p(30) = p(-30) = 96\%$  sannsynlighet, sånn omtrent.

En mine som ligger mer enn 60 meter fra sveiperen, blir ikke fyrt (aktivert).

Den *karaktéristiske normalfunksjonen* er en bestemt funksjon, som har en konstant *karaktéristisk sannsynlighet* ( $a$ ) over en viss *karaktéristisk bredde* ( $b$ ).



Figur 2: Normalfunksjoner

<sup>6</sup> Minerydderskvadronen består i dag av to minejaktfartøy, to minesveipere og to kontainerbaserte autonome minejaktssystemer, Hugin. Fartøyene vil etter hvert bli erstattet med autonome mineryddersystemer. Prop. 151 S (2015–2016) *Kampkraft og bærekraft – Langtidsplan for forsvarssektoren*.

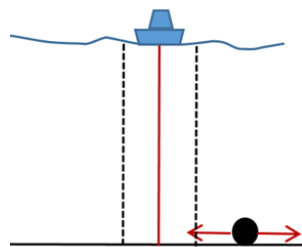
Den karakteristiske normalfunksjonen til  $p(x)$  er den røde kurven i Figur 2. Her er  $a = 0.94$  og  $b = 104$  meter. Utrekningene av  $a$  og  $b$  følger en helt bestemt prosedyre, som ikke blir presentert her. (Ok, ett krav er at arealet under grafene til de to funksjonene er det samme. Det betyr at *integrasjon* spiller en rolle.) Det er den karakteristiske normalfunksjonen som brukes i de beregninger som blir gjort av både MCM EXPERT og MPP 2010.

Ulike minetyper har ulike normalfunksjoner, og ulike karakteristiske normalfunksjoner.

Minens aktiveringsbredde og skadevidde kan vi tenke oss blir satt lik minens karakteristiske bredde. (Programmet DARE 2.1. krever at man oppgir både minenavn og skadevidde.)

### 5. Forutsetninger og konsekvenser

Vi begrenser oss til situasjoner hvor det sveipes etter en bestemt minetype. Et sveip vil dekke en viss bredde. La oss se på en mine som ligger slik til at sveipets bredde og minens karakteristiske bredde overlapper (se Figur 3). Vi vil enten si at «Fartøyet passerer innenfor minens skadevidde» eller at «Minen ligger innenfor sveipbredden», alt etter som hva som passer best.



Figur 3: Sveipbredde og skadevidde

- a) Minen blir detektert med en sannsynlighet lik  $p$ , som kalles *deteksjonssannsynligheten*.

Det kan kanskje være fristende å sette denne sannsynligheten lik den karakteristiske sannsynligheten  $a$ , men så enkelt er det ikke nødvendigvis. Det henger blant annet sammen med at bunnforholdene vil ha innvirkning, og at man slett ikke kjenner minens karakteristiske funksjon.<sup>7</sup>

- b) Hvis minen *ikke* blir detektert, er sannsynligheten for at den detekteres neste gang et sveip passerer innenfor minens karakteristisk bredde, fortsatt lik  $p$ .
- c) Hva som skjer med én mine, har ingen innflytelse på hva som skjer med andre miner som måtte være til stede.

Dette er altså forutsetningene.

Hvis det nå er kjent at det ligger  $M$  miner innenfor sveipbredden, i hele sveipets lengde, så har vi sannsynlighetsfordelingen for antall gjenværende miner etter ett sveip. Og ikke bare det, men også etter to, tre og fire sveip, og enda flere.

La oss først se på ett sveip.

Sannsynlighetsfordelingen for antall miner som blir *funnet* i ett søk, når det er  $M$  miner i området, er binomisk fordelt med parametere  $M$  og  $p$ . (De  $M$  minene representerer uavhengige enkeltforsøk med suksesssannsynlighet lik  $p$ .)

La  $M_1$  være antall miner som *ikke* er funnet etter første søk, dvs. antall gjenværende miner.  $M_1$  er en binomisk fordelt variabel med parametere  $M$  og  $1 - p$ .

Sannsynligheten for at en bestemt mine ikke er funnet etter to sveip er  $(1 - p)^2$ , at den ikke er funnet etter tre sveip er  $(1 - p)^3$ , og så videre. Antall gjenværende miner etter  $n$  sveip,  $M_n$ , er binomisk fordelt med parametere  $M$  og  $(1 - p)^n$ , for  $n = 1, 2, \dots$

<sup>7</sup> Det er ikke noe i de ugraderte manualene som sier hvordan man kommer fram til verdien til deteksjonssannsynligheten.

Disse sannsynlighetene er naturligvis interessante for de som legger ut miner, for å forsvare seg mot en fiende.

### Eksempel

Med 40 miner i innløpet til en fjord, og en fiende som rydder miner med en deteksjonssannsynlighet 0.7, er sannsynlighetsfordelingen for antall gjenværende miner etter første søk som vist i Figur 4, og med tall som indikert i de to første kolonnene i Tabell 1.

Det forventede antall gjenværende miner er  $40 \cdot (1 - 0.7) = 12$ .

Anta som tidligere at minene har skadevidde lik 400 meter og at fjorden er 4 km bred.

Initialtrusselen, etter at ett søk er gjennomført, regnes ut for hvert antall av mulige gjenværende miner,  $m = 0, 1, 2, \dots, 40$ , med formelen:  $SIT(m) = 1 - (1 - 400/4000)^m$ .

Tallene er vist i 3. kolonne i Tabell 1.

*Risk*, definert som *forventet* SIT, er gitt som summen av produktene i 4. kolonne:  $Risk = 70.4\%$ .

Etter et nytt søk, fortsatt med  $p = 0.7$ , er det forventede antall gjenværende miner:

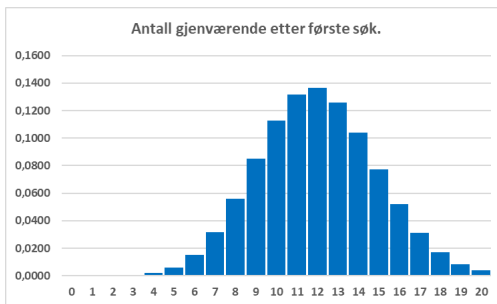
$$40 \cdot (1 - 0.7)^2 = 3.6.$$

Det er ca. 50 % sannsynlig at det er minst fire gjenværende miner (se Figur 5). *Risk* er 30.3 %.

Etter et tredje søk er det forventede antall gjenværende miner 1.08.

*Risk* reduseres til 10.3 %. Sannsynligheten for at det vil være høyst to gjenværende miner er 90.7 %.

Vurderinger av den typen som er gjort i dette eksemplet, er altså interessante for de som skal forsvare seg med miner. De er av liten interesse for dem som skal rydde området, fordi antall miner vanligvis ikke er kjent for minerydterne.

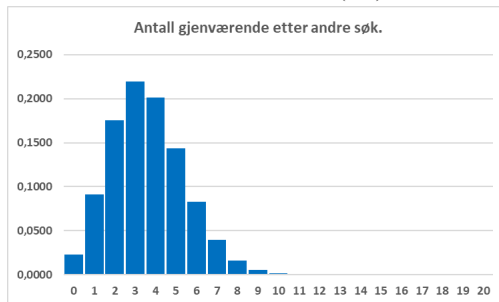


Figur 4: 40 miner og deteksjonssannsynlighet lik 0.7.

$m$	$P(M_1 = m)$	$SIT(m)$	$SIT(m) \cdot P(M_1 = m)$
0	0.0000	0	0
1	0.0000	0.100	0
2	0.0001	0.190	0.000019
3	0.0005	0.271	0.000136
4	0.0020	0.344	0.000688
5	0.0061	0.410	0.002498
6	0.0151	0.469	0.007075
...	...	...	...
40	0.0000	0.985	0

$$Risk = Sum = 0.704363$$

Tabell 1: Sannsynligheter for antall gjenværende miner og *Risk* som forventet initialtrussel (SIT).



Figur 5: 40 miner og deteksjonssannsynlighet lik 0.7.

## 6. A priori-fordeling for antall miner i et område

Nå er det sjelden slik at man vet hvor mange miner som befinner seg innenfor et område som skal klareres. Da trenger man en sannsynlighetsfordeling for  $M$  for å kunne gjøre videre beregninger, en såkalt *a priori-fordeling*. Denne *a priori-fordelingen* kan enten være en standardfordeling som programvaren tilbyr, eller den kan komme fra tidligere erfaringer, eller fra etterretning.

I noen tilfeller vil man ta utgangspunkt i en forventet minetetthet ( $\rho$ ), f.eks. 4 miner pr. n.m.<sup>2</sup>, og så, når arealet ( $a$ ) av det området som skal klareres er gitt, f.eks. 5 n.m.<sup>2</sup>, har man det forventede antall miner i området:  $\lambda = \rho \cdot a = 20$  miner.

Vi skal se på to mulige a priori-fordelinger med  $\lambda$  som utgangspunkt, og en tredje a priori-fordeling som *ikke* bygger på noen a priori informasjon.

### 6.1 Poisson a priori-fordeling

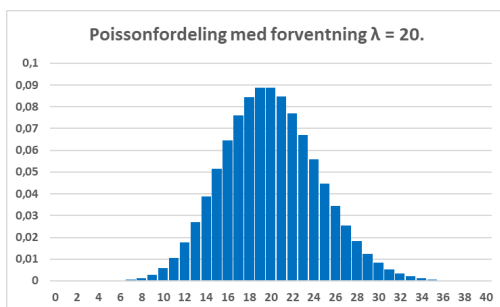
Et område med areal  $A$  er minelagt med  $N$  miner. En ønsker å rydde en «kanal» gjennom dette området med areal lik  $a$ . Antall miner i kanalen ( $M$ ) er binomisk fordelt med parametrene  $N$  og  $a/A$ . Når antall miner i området er stort, og kanalens areal er lite sammenlignet med hele området, kan den binomiske fordelingen *tilnærmes* med Poisson-fordelingen med parameter  $\lambda$ .<sup>8</sup>

Når man har gjort seg opp en mening om forventet minetetthet  $\rho$ , er den åpenbare fordelingen at man ikke trenger å vite hvor mange miner som er plassert ut i området, og heller ikke hvor stort området er.

Med en Poisson-fordeling, med forventning lik  $\lambda$ , ser a priori-sannsynlighetene slik ut:

$$P(M = m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ for } m = 0, 1, 2, \dots$$

Fordelingen, med  $\lambda = 20$  er illustrert i Figur 6. De mest sannsynlige antall er 19 og 20 miner, med sannsynlighet litt under 9 %.



Figur 6: Poisson-fordeling med forventning  $\lambda = 20$ .

Det er ingen øvre grense for hvor mange miner som kan være til stede.<sup>9</sup>

### 6.2 Uniform a priori-fordeling

Et annet utgangspunkt i praktisk søk etter miner, er å anta at det mulige antall miner er oppad begrenset av et tall  $m_{max}$ . Det vil si  $M$  kan være 0 miner, eller 1 mine, eller 2 miner, ..., eller  $m_{max}$  miner. Hvis det forventede antall miner ( $\lambda$ ) er estimert, så setter man det maksimale antall til det dobbelte ( $m_{max} = 2\lambda$ ). Hvert av de mulige antall antas å være like sannsynlige.

Det vil si at a priori-sannsynlighetene er:

$$P(M = m) = \frac{1}{m_{max} + 1}, \text{ for } m = 0, 1, 2, \dots, m_{max}.$$

### 6.3 Ikke-informativ a priori-fordeling

Hvis man ikke er villig til å benytte en forventet minetetthet, er teknikken å bruke den såkalte *ikke-informative a priori-fordeling*. Man antar at det er lagt ut  $N$  miner, med en uniform sannsynlighetsfordeling på de mulige verdiene  $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ . I matematikken (teorien) som følger, lar man  $N$  vokse over alle grenser (gå mot uendelig), og resultatene som kommer ut av dette (avsnitt 7.3) spiller faktisk en vesentlig rolle i praktisk minesveip.<sup>10</sup>

<sup>8</sup> Dette er et velkjent resultat. Se f.eks. Ross (2000), side 32.

<sup>9</sup> Poisson-fordeling minner om Gauss-fordeling når forventningsverdien er stor, og  $\lambda = 20$  regnes gjerne for å være stor nok. Men akkurat dette har ingen betydning for det vi driver med her.

<sup>10</sup> I manualene til MCM EXPERT og DARE 2.1 brukes uniforme fordelinger som eksempler, men det understrekes at dette bare er som tilnærming til den uendelige uniforme fordeling, hvor alle sannsynlighetene er lik null.

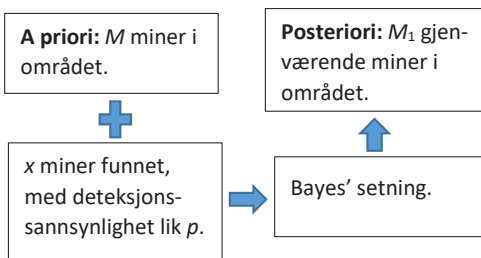


## 7. Bayes' setning og posteriorifordelingen

Utgangspunktet er en sannsynlighetsfordeling,  $P(M = m)$ , for antall miner i området.

Området gjennom søkes med en gitt deteksjonssannsynlighet  $p$ , og la oss si at  $x$  miner blir funnet.

Denne informasjonen vil *justere* sannsynlighetsfordelingen for hvor mange miner det *har vært* i området, og gi oss sannsynlighetsfordelingen for antall *gjenværende* miner,  $M_1$ , i området.



Figur 7: Fra a priori-fordeling til posteriorifordeling.

Disse sannsynlighetene:  $P(M_1 = m | x)$ , kalles *posteriorisannsynlighetene*.

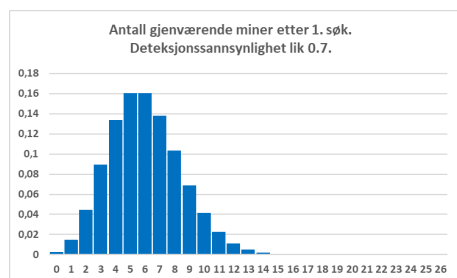
Proseduren er illustrert i Figur 7, nesten som om det skulle vært noe mystisk, men det er det altså ikke. Bayes' setning er egentlig ganske enkel matematikk, men er imidlertid såpass teknisk at det vil være en avsporing å presentere den med det matematiske formelapparatet her. Den er gitt i Appendiks A.1.

### 7.1 Poisson a priori-fordeling

Hvis a priori-fordelingen er en Poisson-fordeling med forventning lik  $\lambda$ , og det søkes etter miner med deteksjonssannsynlighet lik  $p$ , er posteriorifordelingen for antall *gjenværende* miner en Poisson-fordeling med forventning lik  $\lambda(1 - p)$ , *uavhengig* av antall miner som er funnet.<sup>11</sup>

Et nytt søk, med samme deteksjonssannsynlighet  $p$ , gir en Poisson-fordeling med forventning lik  $\lambda(1 - p)^2$  som posteriorisannsynligheter.

Med  $\lambda = 20$  og  $p = 0.7$ , ser histogrammene for antall gjenværende miner etter 1. og 2. søk ut som vist i Figur 8A og Figur 8B.



Figur 8A: Poisson a priori-fordeling, forventning lik 20.



Figur 8B: Poisson a priori-fordeling, forventning lik 20.

I utgangspunktet var det forventede antall miner lik 20. Etter første søk er det forventede antall gjenværende miner 6, og etter neste søk 1.8 miner.

### 7.2 Uniform a priori-fordeling

Med den uniforme a priori-fordelingen, fra 0 til 40, er sannsynligheten for et hvilket som helst antall miner, fra 0 og med 0 og til og med 40, lik  $\frac{1}{41} = 0.0244$ .

Når området blir gjennom søkt med en deteksjonssannsynlighet lik 0.7 forventes det at 70 % av mine blir funnet.

<sup>11</sup> Appendiks A2. Denne egenskapen ved Poisson-fordelingen kan kanskje være et argument *mot* å bruke den som a priori-fordeling.

Om så f.eks. 14 miner blir funnet, vil det ikke være direkte urimelig å anta at det har vært lagt ut 20 miner, og at det er 6 gjenværende miner.

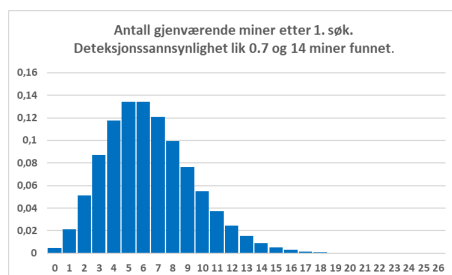
Vel, Bayes' setning vil gi oss sannsynlighetsfordelingen for antall gjenværende miner, som vist i Figur 9A.

Vi ser at de mest sannsynlige antall gjenværende miner er 5 og 6, med ca. 13.5 % sannsynlighet.

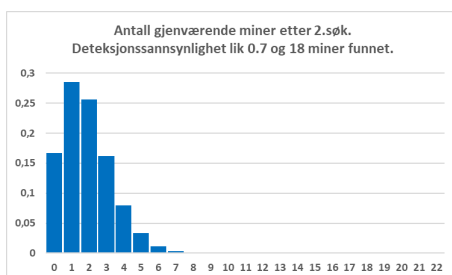
Anta så at et nytt søk resulterer i at fire miner blir funnet, slik at totalt 18 miner er funnet.<sup>12</sup>

Da kalkuleres det nye posteriorisannsynligheter (Figur 9B) for antall gjenværende miner, med sannsynlighetsfordelingen fra Figur 9A som a priori-sannsynligheter.

Det er ikke så store forskjeller mellom histogrammene i Figur 8B (Poisson a priori) og 9B (uniform a priori). Etter et tredje søk ville posteriorifordelingene «sannsynligvis» lignet enda mer. A priori-fordelingen får mindre og mindre betydning, ettersom flere og flere søk blir gjennomført.<sup>13</sup> Og dermed kan det være naturlig å la a priori-fordelingen være den ikke-informative.



Figur 9A: Uniform a priori-fordeling på {0, 1, 2, ..., 40}.



Figur 9B: Uniform a priori-fordeling på {0, 1, 2, ..., 40}.

### 7.3 Ikke-informativ a priori-fordeling

Man antar at det er lagt ut et stort antall miner,  $N$ , og bruker en uniform sannsynlighetsfordeling på de mulige verdiene  $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ .

Når  $N$  er stor, eller når  $N \rightarrow \infty$ , får posteriorisannsynlighetene etter første søk – med  $x$  miner funnet – en relativt enkel form:<sup>14</sup>

$$P(M_1 = m | x) = \binom{m+x}{x} p^{x+1} (1-p)^m, \text{ for } m = 0, 1, 2, \dots$$

Dette er en negativ binomisk fordeling med parametere  $x + 1$  og  $p$ .

Sannsynlighetsfordelingen for antall gjenværende miner,  $(M_n)$ , når  $s_n$  miner er funnet etter  $n$  gjentatte søk med samme deteksjonssannsynlighet  $p$ , er også en negativ binomisk fordeling.<sup>15</sup>

$$P(M_n = m | s_n) = \binom{m+s_n}{s_n} (1-(1-p)^n)^{s_n+1} (1-p)^{n-m}, \text{ for } m = 0, 1, 2, \dots$$

Disse sannsynlighetsfordelingene går som aldeles glimrende tilnærminger til de posteriorifordelingen som følger fra en uniform a priori-fordeling med  $N = 40$  (som ble brukt som

<sup>12</sup> Det spiller faktisk ingen rolle hvor mange miner som blir funnet i første og i andre søk, når det totale antall er gitt. Dette gjelder uansett hvilken a priori-fordeling som brukes, og også med ulike deteksjonssannsynligheter i søkene. Bevis for dette er gitt i Appendiks A.3

<sup>13</sup> Denne lite velformulerte påstanden må nok dessverre bare stå slik.

<sup>14</sup> Det burde naturligvis stått:  $\lim_{N \rightarrow \infty} P(M_1 = m | x) = \dots$ . Bevis er gitt i Appendiks A4.

<sup>15</sup> Negativ binomisk fordeling med parametere  $s_n + 1$  og  $1 - (1 - p)^n$ . Bevis er gitt i Appendiks A4.

eksempel i avsnitt 7.2). Det betyr at histogrammene i figurene 9A og 9B også gjelder med den ikke-informative a priori-fordeling.

### Confidence Level (CL)

Sannsynligheten for at det er høyst  $t$  gjenværende miner:

$$CL(t) = P(M_n \leq t | s_n) = P(M_n = 0 | s_n) + P(M_n = 1 | s_n) + \dots + P(M_n = t | s_n),$$

kalles for (et) *konfidensnivå*.

Kravet til når man skal avslutte å søke etter miner, kan, for eksempel være gitt ved at sannsynligheten for at det er høyst 2 gjenværende miner, er minst lik 95 %.

Det vil si:  $CL(2) \geq 95\%$ .

**Forventet antall gjenværende miner** er gitt ved følgende formel.

$$E[M_n | s_n] = \frac{(1-p)^n}{1-(1-p)^n} \cdot (s_n + 1).$$

### Eksempel

Anta nå at det er blitt funnet 14 miner i første søk, 4 miner i neste søk, og så ingen miner i tredje søk. Det vil si  $x = s_1 = 14$ ,  $s_2 = 18$  og  $s_3 = 18$ . Deteksjonssannsynligheten  $p$  er fortsatt lik 0.7. Konfidensnivået til  $t = 2$  miner og det forventede antall gjenværende miner blir:

	$CL(2)$	$E[M_n   s_n]$
$s_1 = 14$	0.0774	6.43
$s_2 = 18$	0.7081	1.88
$s_3 = 18$	0.9818	0.53

En «hjørnesteinsformel» i mineverdenen er formelen som gir hvor stor deteksjonssannsynligheten  $p$  må være (i prosent) dersom man skal være  $CL$  prosent sikker på at det er høyst  $t$  gjenværende miner, hvis *ingen* miner er funnet:

$$p \geq 100 \cdot \left( 1 - (1 - 0.01 \cdot CL)^{\frac{1}{t+1}} \right)$$

## 8. Miner med skipstellers

Så langt har dette handlet om miner uten skipstellers, men moderne miner er utstyrt med skipstellers. Det som kan være spennende matematikk når det gjelder skipstellers, er å bestemme optimale strategier for hvordan disse skal stilles inn. Og hva som er optimalt, vil være avhengig av hva hensikten med minefeltet skal være. Hvis alle minene har skipstellers satt lik 1 er initialtrusselen (SIT) størst, men da vil området være raskere ryddet enn om alle telleverkene er satt til maksimalverdi,  $t_{\max}$ .

I mine-rydde-operasjoner antar man gjerne at hver skipstellers er satt ifølge en uniform fordeling på  $\{1, 2, \dots, t_{\max}\}$ . Det krever at man kjenner maksimalverdien. Da vil resultatet etter første søk gi en pekepinn om hvor mange miner som er lagt ut.

### Eksempel

Hvis maksimal teller er  $t_{\max} = 5$ , så vil ca. 20 % av minene få teller lik 1. Etter et første søk, med deteksjonssannsynlighet  $p = 0.8$ , som f.eks. resulterer i at  $x = 8$  miner blir funnet, tyder det på at det har vært 10 miner med teller lik 1, og 50 miner totalt. Det vil si det er cirka 42 gjenværende miner.

Med den ikke-informative a priori-fordelingen blir posteriorifordelingen for antall gjenværende miner negativ binomisk, med parametere 9 og 0.16.<sup>16</sup> De mest sannsynlige antall er 41 og 42, begge med sannsynlighet lik 0.02436. Ikke overveldende store sannsynligheter, men altså en pekepinn.

Selv om matematikken, med uniform fordeling på hver skipsteller, gir pene resultater, så er det ikke sikkert at uniform fordeling er en god ide fra mineleggers synspunkt.

Teorien omkring mine-mottiltak kompliseres også noe når skipstellere bringes på banen. Det henger sammen med at når det søkes første gang i et område, så er det kun de minene som har skipsteller lik 1 som kan detekteres, mens alle de andre *kan* registrere søket – og dermed gå opp ett hakk på skipstellersen, men det *behøver* ikke å skje.

La oss avslutningsvis se på sveip etter miner med skipsteller, uten å anta uniform innstilling av skipstellersene.

Hvis deteksjonssannsynligheten er lik  $p$  som vanlig, er antall forsøk,  $T_j$ , som må til for å finne en mine med skipsteller lik  $j$ , det samme som å vente på suksess nr.  $j$  i en serie med uavhengige Bernoulli-forsøk med suksesssannsynlighet lik  $p$ . Det vil si  $T_j - j$  (antall fiaskoer) er negativ binomisk fordelt med parametere  $p$  og  $j$ .

Sannsynligheten for at én slik mine er funnet i løpet av  $k$  forsøk er:

$$q_k^{(j)} = P(T_j \leq k) = \sum_{r=j}^k \binom{r-1}{j-1} \cdot p^j \cdot (1-p)^{r-j}, \text{ hvor } k \geq j.$$

La  $N_j$  være antall miner med skipsteller lik  $j$ . Hvis  $X_k^{(j)}$  er antall miner med skipsteller lik  $j$  som er funnet etter  $k$  søk, er  $X_k^{(j)}$  binomisk fordelt med parametere  $N_j$  og  $q_k^{(j)}$ .

Variablene  $X_k^{(1)}, X_k^{(2)}, \dots, X_k^{(k)}$  er uavhengige, og antall miner som er funnet etter  $k$  søk er:

$$M_k = X_k^{(1)} + X_k^{(2)} + \dots + X_k^{(k)}.$$

Sannsynlighetsfordelingen for  $M_k$  er i praksis lett å finne, når  $p$  og  $N_1, N_2, \dots, N_k$  er kjente tall.<sup>17</sup> Disse tallene er det kun minelegger som kan kjenne. Det vil si, det er ikke sikkert at  $p$  er kjent for minelegger, men han kan sette opp ulike scenarioer, med ulike verdier for  $p$ .

Den som søker etter miner vil måtte hente informasjon om minefeltet ved, for eksempel, å bruke ikke-informative a priori-fordelinger på  $N_1, N_2, \dots, N_k$ , og så observere:  $M_1, M_2, \dots$ .

## Appendiks

Notasjonen her i appendikset avviker ubetydelig fra notasjonen ellers i artikkelen.

### A1. Bayes' setning, fra a priori-fordeling til posteriorifordeling

La  $M^{(0)}$  være antall miner i området før noe søk er iverksatt, og a priori-fordelingen er:

$$r_m^{(0)} = P(M^{(0)} = m), \text{ for } m = 0, 1, 2, \dots$$

Når området gjennomføres én gang, med deteksjonssannsynlighet lik  $p$ , blir  $X_1$  miner funnet.  $X_1$  er en stokastisk variabel, og de *betingete* sannsynlighetene for  $X_1$  gitt  $M^{(0)} = m$  er ganske enkelt binomiske sannsynligheter med parametere  $m$  og  $p$ .

$$P(X_1 = x | M^{(0)} = m) = \text{binomPdf}(m, p, x), \text{ for } x = 0, 1, 2, \dots, m.$$

De *ubetingete* sannsynlighetene for  $X_1$  er gitt fra setningen om total sannsynlighet:

<sup>16</sup> Negativ binomisk med parametere  $x + 1$  og  $p/t_{\max}$ .

<sup>17</sup> Dette kalles konvolusjon av binomiske fordelinger, og kan f.eks. bestemmes med et Python-program.

$$P(X_1 = x) = \sum_{k=x}^{\infty} P(X_1 = x | M^{(0)} = k) \cdot P(M^{(0)} = k) = \sum_{k=x}^{\infty} \text{binomPdf}(k, p, x) \cdot r_k^{(0)}.$$

Posteriorisannsynlighetene for antall miner i området, gitt at  $x$  miner er funnet i første søk, er de betingete sannsynlighetene for  $M^{(0)}$  gitt  $X_1$ . Disse er gitt fra Bayes' setning:<sup>18</sup>

$$P(M^{(0)} = m | X_1 = x) = \frac{P(X_1 = x | M^{(0)} = m)P(M^{(0)} = m)}{P(X_1 = x)} = \frac{\text{binomPdf}(m, p, x) \cdot r_m^{(0)}}{\sum_{k=x}^{\infty} \text{binomPdf}(k, p, x) \cdot r_k^{(0)}}, \quad m = x, x+1, x+2, \dots$$

Fordelingen for antall *gjenværende* miner etter at  $x$  miner er funnet i første søk,  $M^{(1)} = M^{(0)} - x$ , er:

$$r_m^{(1)}(x) = \frac{\text{binomPdf}(m+x, p, x) \cdot r_{m+x}^{(0)}}{\sum_{k=x}^{\infty} \text{binomPdf}(k, p, x) \cdot r_k^{(0)}}, \quad \text{for } m = 0, 1, 2, \dots$$

## A.2 Poisson a priori-fordeling

Nevneren i dette uttrykket blir:

$$\begin{aligned} \sum_{k=x}^{\infty} \text{binomPdf}(k, p, x) \cdot r_k^{(0)} &= \sum_{k=x}^{\infty} \frac{k!}{x! \cdot (k-x)!} p^x (1-p)^{k-x} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= p^x \cdot \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=x}^{\infty} \frac{\lambda^{k-x} (1-p)^{k-x}}{(k-x)!} = p^x \cdot \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot (1-p))^k}{k!} = p^x \cdot \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda(1-p)}. \end{aligned}$$

$$\text{Telleren er: } \frac{(m+x)!}{x! \cdot m!} p^x (1-p)^m \cdot \frac{\lambda^{m+x}}{(m+x)!} e^{-\lambda} = p^x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!}.$$

Så blir brøken (*teller/nevner*):

$$r_m^{(1)}(x) = \frac{(\lambda(1-p))^m}{m!} \cdot e^{-\lambda(1-p)}, \quad \text{for } m = 0, 1, 2, \dots$$

## A.3 Posteriorisannsynlighetene etter $n$ søk avhenger kun av antall miner som er funnet totalt

Det blir søkt to ganger gjennom et område som kan være minelagt. Antall miner i området er  $M^{(0)}$  med sannsynlighetsfordeling  $r_m^{(0)} = P(M^{(0)} = m)$ , for  $m = 0, 1, 2, \dots$

La  $p$  og  $q$  være deteksjonssannsynlighetene i henholdsvis første og annet søk.

En mine blir oppdaget med sannsynlighet lik  $p$  i første søk, med sannsynlighet  $(1-p)q$  i annet søk, og den blir ikke oppdaget i noen av søkene med sannsynlighet  $(1-p)(1-q)$ .

Hvis  $X_1 =$  antall miner oppdaget i første søk og  $X_2 =$  antall miner oppdaget i andre søk, er:

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1 \text{ og } X_2 = x_2 | M^{(0)} = m) &= \frac{m!}{x_1! \cdot x_2! \cdot (m - (x_1 + x_2))!} \cdot p^{x_1} \cdot ((1-p)q)^{x_2} \cdot ((1-p)(1-q))^{m - (x_1 + x_2)} \\ &= \frac{1}{x_1! \cdot x_2!} \cdot \frac{p^{x_1} \cdot ((1-p)q)^{x_2}}{((1-p)(1-q))^{(x_1 + x_2)}} \cdot \frac{m!}{(m - (x_1 + x_2))!} \cdot ((1-p)(1-q))^m, \quad \text{for } x_1 + x_2 \leq m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1 \text{ og } X_2 = x_2) &= \sum_{k=x_1+x_2}^{\infty} P(X_1 = x_1 \text{ og } X_2 = x_2 | M^{(0)} = k) \cdot P(M^{(0)} = k) \\ &= \frac{1}{x_1! \cdot x_2!} \cdot \frac{p^{x_1} \cdot ((1-p)q)^{x_2}}{((1-p)(1-q))^{(x_1 + x_2)}} \cdot \sum_{k=x_1+x_2}^{\infty} \frac{k!}{(k - (x_1 + x_2))!} \cdot ((1-p)(1-q))^k \cdot r_k^{(0)}. \end{aligned}$$

Posteriorfordelingen for  $M^{(0)}$ , gitt  $X_1 = x_1$  og  $X_2 = x_2$ , er fortsatt gitt fra Bayes' setning.

<sup>18</sup> Se Ross (2000), side 14.

$$\begin{aligned}
P(M^{(0)} = m | X_1 = x_1 \text{ og } X_2 = x_2) &= \frac{P(X_1 = x_1 \text{ og } X_2 = x_2 | M^{(0)} = m) \cdot P(M^{(0)} = m)}{P(X_1 = x_1 \text{ og } X_2 = x_2)} \\
&= \frac{\frac{m!}{(m - (x_1 + x_2))!} \cdot ((1-p)(1-q))^m \cdot r_m^{(0)}}{\sum_{k=x_1+x_2}^{\infty} \frac{k!}{(k - (x_1 + x_2))!} \cdot ((1-p)(1-q))^k \cdot r_k^{(0)}}, \text{ for } m \geq x_1 + x_2.
\end{aligned}$$

Disse sannsynlighetene er kun avhengig av det totale antall miner,  $x_1 + x_2$ , funnet i de to søkene, og *ikke* av hvilket av de to søkene minene ble funnet i.

Dette resultatet generaliseres uten videre til flere søk, hvor altså deteksjonssannsynlighetene i søkene kan være forskjellige.

#### A.4 Posteriorisannsynligheter med ikke-informativ a priori-fordeling

Et annet utgangspunkt er å bruke en såkalt ikke-informativ a priori-fordeling. Da antar man at det kan være lagt ut et stort antall miner,  $N$ , og bruker en uniform sannsynlighetsfordeling på de mulige verdiene  $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ . Det vil si at a priori-sannsynlighetene er  $r_m^{(0)} = 1/(N+1)$ , for  $m = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Posteriorisannsynlighetene blir:

$$r_m^{(1)}(x) = \frac{\text{binomPdf}(m+x, p, x) \cdot \frac{1}{N+1}}{\sum_{k=x}^N \text{binomPdf}(k, p, x) \cdot \frac{1}{N+1}} = \frac{\text{binomPdf}(m+x, 1-p, m)}{\sum_{k=x}^N \text{binomPdf}(k, p, x)}, \text{ for } m = 0, 1, 2, \dots$$

Nevneren ser slik ut:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=x}^N \text{binomPdf}(k, p, x) &= \sum_{k=x}^N \frac{k!}{x! \cdot (k-x)!} p^x (1-p)^{k-x} \\
&= p^x \cdot \sum_{k=x}^N \frac{k!}{x! \cdot (k-x)!} (1-p)^{k-x} = p^x \cdot \sum_{k=0}^{N-x} \frac{(k+x)!}{x! \cdot k!} (1-p)^k.
\end{aligned}$$

Når  $N$  er stor, eller når  $N \rightarrow \infty$ , er:

$$p^x \cdot \sum_{k=0}^{N-x} \frac{(k+x)!}{x! \cdot k!} (1-p)^k \approx p^x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+x)!}{x! \cdot k!} (1-p)^k =^{19} p^x \cdot (1 - (1-p))^{-(x+1)} = p^x \cdot p^{-x-1} = p^{-1}.$$

Og da blir

$$r_m^{(1)}(x) = p \cdot \text{binomPdf}(m+x, 1-p, m) = \binom{m+x}{x} p^{x+1} (1-p)^m, \text{ for } m = 0, 1, 2, \dots$$

Det blir søkt to ganger gjennom området, med deteksjonssannsynlighet  $p$  første gang, og  $q$  andre gang. Med uniform fordeling på  $\{0, 1, 2, \dots, N\}$  har vi posteriorisannsynlighetene:

$$P(M^{(0)} = m | X_1 = x_1 \text{ og } X_2 = x_2) = \frac{\frac{m!}{(m - (x_1 + x_2))!} \cdot ((1-p)(1-q))^m}{\sum_{k=x_1+x_2}^N \frac{k!}{(k - (x_1 + x_2))!} \cdot ((1-p)(1-q))^k}, \text{ for } m \geq x_1 + x_2.$$

Nevneren blir:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=x_1+x_2}^N \frac{k!}{(k - (x_1 + x_2))!} \cdot ((1-p)(1-q))^k \\
&= (x_1 + x_2)! \cdot ((1-p)(1-q))^{x_1+x_2} \cdot \sum_{k=x_1+x_2}^N \frac{k!}{(x_1 + x_2)! (k - (x_1 + x_2))!} \cdot ((1-p)(1-q))^{k-(x_1+x_2)}
\end{aligned}$$

<sup>19</sup> Binomialformelen med negativ heltallsekspontent:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n! \cdot k!} z^k = (1-z)^{-(n+1)}$ , for  $|z| < 1$ .

$$= (x_1 + x_2)! \cdot ((1-p)(1-q))^{x_1+x_2} \cdot \sum_{k=0}^{N-(x_1+x_2)} \frac{(k + (x_1 + x_2))!}{(x_1 + x_2)! \cdot k!} \cdot ((1-p)(1-q))^k .$$

Når  $N \rightarrow \infty$  konvergerer summen til  $((1-p)(1-q))^{-(x_1+x_2+1)}$ .

$$\begin{aligned} P(M^{(0)} = m \mid X_1 = x_1 \text{ og } X_2 = x_2) &= \frac{\frac{m!}{(m - (x_1 + x_2))!} \cdot ((1-p)(1-q))^m}{(x_1 + x_2)! \cdot ((1-p)(1-q))^{x_1+x_2} \cdot ((1-p)(1-q))^{-(x_1+x_2+1)}} \\ &= \frac{m!}{(x_1 + x_2)! \cdot (m - (x_1 + x_2))!} \cdot ((1-p)(1-q))^{(x_1+x_2+1)} \cdot ((1-p)(1-q))^{m-(x_1+x_2)}, \text{ for } m \geq x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Antall gjenværende miner  $M^{(2)}$ , gitt  $x_1$  og  $x_2$ , er  $M^{(0)} - (x_1 + x_2)$ , med sannsynlighetsfordelingen

$$r_m^{(2)}(x_1 + x_2) = \frac{(m + x_1 + x_2)!}{m! \cdot (x_1 + x_2)!} \cdot (1 - (1-p)(1-q))^{x_1+x_2+1} \cdot ((1-p)(1-q))^m, \text{ for } m = 0, 1, 2, \dots .$$

Dette er en negativ binomisk fordeling med parametere  $x_1 + x_2 + 1$  og  $1 - (1-p)(1-q)$ , og generaliseres uten videre til flere søk.

## Referanser

DARE 2.1 Decision Aid for Risk Evaluation. NATO Undersea Research Center. NATO UNCLASSIFIED.

MCM EXPERT USER GUIDE. Naval Mine Warfare Planning and Evaluation Software Tools. May 2008. NATO UNCLASSIFIED.

MCM EXPERT Version 4.0.

Planning and Evaluation Method. SACLANTEN M-137. NATO RESTRICTED

MPP2010 *Mine Field Planning Programme* 2010. Forsvarets Forskningsinstitutt,

Naval mine - Wikipedia ([https://en.wikipedia.org/wiki/Naval\\_mine](https://en.wikipedia.org/wiki/Naval_mine))

Ross, Sheldon M. *Introduction to Probability Models*. 7<sup>th</sup> edition. Academic Press. 2000.

Svortdal, Otto Kristian. *Mineinnsats i sjøkrigen*. Institutt for forsvarsstudier. (Uten årstall)

---

# En oppskrift for å teste om forventningsverdier og varianser er like, i to serier med uavhengige normalfordelte observasjoner, ved simuleringer

Knut Meen

*Seksjon for sjømilitær teknologi, FHS Sjøkrigsskolen*

Ethvert innføringskurs i statistiske metoder tar opp problemet med å teste om en forventningsverdi  $\mu$ , i en serie med uavhengige normalfordelte observasjoner, har en spesifikk verdi  $\mu_0$ . Både problemet med kjent standardavvik (z-test) og med ukjent standardavvik (t-test) blir vanligvis presentert. To-utvalgs-problemet, hvor forventningsverdier fra to uavhengige normalfordelte observasjonsserier skal sammenlignes, er også standard. Testmetodene er utledet fra maximum likelihood-prinsippet, og er såkalte *sannsynlighetskvotetest*. Det er strengt tatt ikke nødvendig å vite hva dette betyr, for å følge med i det som blir presentert her. Et innføringskurs i statistikk vil heller ikke si noe om maximum likelihood og sannsynlighetskvotetest.

Nå skal dette handle om det spesielle to-utvalgs-problemet, hvor man ønsker å teste om *både* forventningsverdiene er like *og* om standardavvikene er like. Det blir gitt en oppskrift på hvordan dette kan gjøres ved simuleringer. Testmetoden som benyttes, og som ble beskrevet av Pearson & Neyman (1930), er også en sannsynlighetskvotetest.

*Takk til professor Tore Langholm for en rekke gode innspill.*



## 1. Innledning

En ikke helt ualminnelig måte for å teste om forventningsverdiene  $\mu_1$  og  $\mu_2$  fra to observasjonsserier er ulike, er å først teste om variansene er like. Dersom data passerer denne testen går man så på en Students  $t$ -test om  $\mu$ -ene, basert på antagelsen om like varianser. Hvis så også hypotesen om like forventningsverdier godtas, kunne man kanskje tro at den hypotesen som er «vårt problem», at både forventningsverdier og varianser er like, må godtas. Slik er det ikke nødvendigvis.<sup>1</sup>

Problemet med å teste *simultant*, om forventningsverdier er like og varianser er like – med sannsynlighetskvotetesten, kan ha falt utenfor standardmetodene fordi fordelingen til sannsynlighetskvote-observatoren  $\lambda$  ikke har vært en kjent sannsynlighetsfordeling.

Men allerede Pearson & Neyman (1930) viste at  $\lambda$  er tilnærmet *uniformt fordelt* på  $(0, 1)$  når antall observasjoner i hver av de to seriene er stort. Det vi si at  $-2\ln \lambda$  er asymptotisk *kji-kvadratfordelt* med 2 frihetsgrader. Under ganske generelle betingelser om en sannsynlighetskvote-observator  $\lambda$ , kan det bevises at fordelingen for  $-2\ln \lambda$  er tilnærmet *kji-kvadratfordelt*, når antall observasjoner er stort. (Se f.eks. Lehmann & Romano (2005), Theorem 12.4.2, side 515.)

Jain, Rathie & Shah (1975) har funnet rekkeutviklinger for både sannsynlighetstettheten og fordelingsfunksjonen til  $\lambda$ . Disse er imidlertid svært kompliserte, men de er likevel mulige å regne med.<sup>2</sup> Nagar & Gupta (2004) har tabulert prosentiler i den eksakte fordelingen til  $\lambda$ , for tilfeller hvor det er like mange, og høyst 30, observasjoner i hver serie.

Den definitive løsningen kom med Zhang, Xu & Chen (2012). Her er fordelingsfunksjonen til  $\lambda$  gitt som et relativt komplisert dobbeltintegral, men som *kan* beregnes numerisk.

Men hvorfor gjøre det mer komplisert enn nødvendig, hvis det kun er snakk om å bestemme en  $p$ -verdi? I dette notatet skal vi gjennomføre testingen ved å bestemme fordelingen til testobservatoren  $\lambda$  med simuleringer. Dette er en velkjent metode, som hører hjemme blant Monte Carlo-metodene. (Prinsippet er beskrevet i Lehmann & Romano, Example 11.2.13, side 442–443, uten at det blir knyttet opp mot noen konkret modell.)

---

<sup>1</sup> Vi kommer tilbake til dette i siste avsnitt, i forbindelse med Fishers eksakte test.

<sup>2</sup> Dette hevder Frank & Klar (2016).

## 2. Modellens forutsetninger

Det er to uavhengige datakilder, X-er og Y-er, med henholdsvis  $m$  og  $n$  observasjoner:

$X_1, X_2, \dots, X_m$  er uavhengige identisk normalfordelt med forventning lik  $\mu_1$  og varians lik  $\sigma_1^2$ .  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  er uavhengige identisk normalfordelt med forventning lik  $\mu_2$  og varians lik  $\sigma_2^2$ .

Parameterne  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2$  og  $\sigma_2^2$  er ukjente.

## 3. Hypotesene

Nullhypotesen er at X-ene og Y-ene har samme fordeling, alternativhypotesen er at X-ene og Y-ene *ikke* har samme fordeling.

Det vil si å teste:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \text{ og } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{mot} \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2 \text{ og/eller } \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Forutsetningen om at observasjonene er uavhengige og normalfordelt, ligger fast, og testes ikke.

## 4. Utregningene

### 4.1 Observatorene

Tilstrekkelige og nødvendige observatorer er gjennomsnittene og de empiriske standardavvikene i de to seriene. Vi vil imidlertid benytte kvadratsummene  $S_{xx}$  og  $S_{yy}$  i stedet for de empiriske standardavvikene.

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m X_i \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 \quad \text{og} \quad S_{yy} = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2.$$

( $S_{xx}$  og  $S_{yy}$  er lik kvadratet av de empiriske standardavvikene til X-ene og Y-ene, multiplisert med henholdsvis  $m - 1$  og  $n - 1$ .)

### 4.2 Estimatorer

Uten nullhypotesen er standard-estimatorene<sup>3</sup> for  $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2$  og  $\sigma_2^2$ :

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} \quad \hat{\mu}_2 = \bar{Y} \quad \hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{m-1} S_{xx} \quad \text{og} \quad \hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n-1} S_{yy}.$$

---

<sup>3</sup> Maximum-likelihood-estimatene er de samme for  $\mu_1, \mu_2$  og  $\mu$ . Når det gjelder variansene erstattes  $m - 1, n - 1$  og  $m + n - 1$  med  $m, n$  og  $m + n$  i standardestimatene. Det gir maximum-likelihood-estimatene.

Med nullhypotesen er standard-estimatorene for  $\mu = \mu_1 = \mu_2$  og  $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{m+n} (m \cdot \bar{X} + n \cdot \bar{Y}) \quad \text{og} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m+n-1} \left( \sum_{i=1}^m (X_i - \hat{\mu})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\mu})^2 \right).$$

### 4.3 Test-observator

Sannsynlighetskvotetesten benytter testobservatoren:<sup>4</sup>

$$\lambda = \frac{(m+n)^{\frac{m+n}{2}} \cdot (S_{xx})^{\frac{m}{2}} \cdot (S_{yy})^{\frac{n}{2}}}{m^{\frac{m}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot \left( S_{xx} + S_{yy} + \frac{m \cdot n}{m+n} (\bar{X} - \bar{Y})^2 \right)^{\frac{m+n}{2}}}.$$

Nullhypotesen forkastes dersom observatoren  $\lambda$  er liten.<sup>5</sup>

Sannsynlighetsfordelingen til  $\lambda$  er uavhengig av verdien til  $\mu$  og verdien til  $\sigma^2$ , når nullhypotesen gjelder.

La  $\lambda_{\text{obs}}$  være verdien av testobservatoren med gitte data. Da er

$$p\text{-verdien} = P(\lambda \leq \lambda_{\text{obs}} \mid \mu_1 = \mu_2 \text{ og } \sigma_1^2 = \sigma_2^2).$$

Denne sannsynligheten kan bestemmes ved hjelp av Zhang, Xu & Chens eksakte metode, eller med simuleringer – med rimelig god nøyaktighet, som vi har kontroll med.

### 4.4 Eksempel

Zhang, Xu & Chen analyserer et datasett med  $m = n = 20$ .

Observatorene er  $\bar{X} = 402.95$ ,  $\bar{Y} = 366.30$ ,  $S_{xx} = 34\,688.95$  og  $S_{yy} = 49\,042.20$ .

$$\lambda_{\text{obs}} = \frac{40^{20} \cdot (34688.95)^{10} \cdot (49042.20)^{10}}{20^{10} \cdot 20^{10} \cdot \left( 34688.95 + 49042.20 + \frac{20 \cdot 20}{20 + 20} (402.95 - 366.30)^2 \right)^{20}} = 0.0379.$$

Python-programmet *to\_utvalgstest*, gitt i appendiks, gir estimert  $p$ -verdi = 0.04737, etter 10 millioner simuleringer og knappe 2 minutter.

<sup>4</sup> Dette følger fra Pearson & Neyman (1930), etter at deres nevner er gjort om til den nevneren som er gitt her.

<sup>5</sup> Dette er en konsekvens av definisjonen av sannsynlighetskvoten.

Standardfeilen i dette estimatet<sup>6</sup> er  $\sqrt{0.04737 \cdot (1 - 0.04737) / 10000000} = 6.72 \cdot 10^{-5}$ , og et 95 % konfidensintervall for  $p$ -verdien er  $0.04737 \pm 1.96 \cdot 6.72 \cdot 10^{-5} = [0.04724, 0.04750]$ .

Nullhypotesen forkastes med god margin på 5 % nivå.

Zhang, Xu & Chen har laget et program i R som finner  $p$ -verdien eksakt. Dette skjer via et dobbelt integral, som beregnes numerisk med Gauss-kvadratur. Med 500 kvadraturpunkter, og  $\lambda_{\text{obs}} = 0.0379$ , oppgir de at  $p$ -verdien er 0.0488. Forskjellen mellom deres  $p$ -verdi og den simulerte, 0.04737, kan synes ubetydelig, men den er imidlertid så stor at minst én må være feil.

Hvis Zhang, Xu & Chens program får bruke 5000 kvadraturpunkter, med  $\lambda_{\text{obs}} = 0.0379$ , gir det  $p$ -verdien 0.0475. Med 8000 punkter blir  $p$ -verdien 0.0474.

Problemet med den eksakte metoden til Zhang, Xu & Chen er at det er vanskelig å bestemme usikkerheten i den utregnete  $p$ -verdien.

#### 4.5 Prosentiler i fordelingen for $\lambda$

Python-programmet *to\_utvalgstest*, med 10 millioner simuleringer, og med  $m = n = 20$ , estimerer også 1, 5 og 10 prosentilene i fordelingen til  $\lambda$ . Disse er gitt i Tabell 1, sammen med de eksakte prosentilene til Nagar & Gupta.<sup>7</sup>

$m = n = 20$	Simulert prosentil		95 % konfidensintervall		Nagar & Gupta
	Verdi	Standardfeil			
1 %	0.00713	0.000027	0.00708	0.00718	0.00714
5 %	0.04022	0.000062	0.04010	0.04034	0.04015
10 %	0.08457	0.000088	0.08440	0.08474	0.08446

**Tabell 1: Simulerte og eksakte prosentiler for  $m = n = 20$**

Med simuleringer har vi kontroll på usikkerheten i estimatene.

Usikkerheten i Zhang, Xu & Chens resultater er knyttet til den numeriske beregningen av et dobbeltintegral. I Nagar & Guptas utregninger er usikkerhet knyttet til antall desimaler som er benyttet, og kan nok for alle praktiske formål settes lik null.

<sup>6</sup>  $\sqrt{\text{estimat} \cdot (1 - \text{estimat}) / \text{antall simuleringer}}$ .

<sup>7</sup> Nagar & Gupta oppgir prosentilene for  $V = \lambda^{\frac{2}{n}}$ , så de verdiene som er gitt i tabellen, er  $\lambda = V^{\frac{n}{2}}$ . Nagar & Gupta nøyer seg ikke med å sammenligne kun to utvalg, men de gir tabeller som dekker inntil 7 like store utvalg, med opp til og med 30 observasjoner i hvert utvalg.

## 5. Simuleringene

En nærliggende framgangsmåte kan være å simulere to datasett, med henholdsvis  $m$  og  $n$  observasjoner, med like forventningsverdier og like varianser, og så regne ut sannsynlighetsknoten  $\lambda$ . Hvis dette blir gjort 10 millioner ganger, kan  $\alpha$ -prosentilen estimeres som antall ganger  $\lambda$  er mindre enn eller lik  $\alpha$ , dividert med 10 000 000. Med  $m = n = 20$  krever dette at det blir simulert 400 millioner tilfeldige tall, og det blir svært tidkrevende.

Det viser seg at sannsynlighetsfordelingen til  $\lambda$  kan representeres ved hjelp av tre uavhengige kji-kvadratfordelte variabler:  $U_1$  med  $m - 1$  frihetsgrader,  $U_2$  med  $n - 1$  frihetsgrader og  $U_3$  med 1 frihetsgrad.

Så er:

$$\lambda = \frac{(m+n)^{\frac{m+n}{2}} \cdot (U_1)^{\frac{m}{2}} \cdot (U_2)^{\frac{n}{2}}}{m^{\frac{m}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot (U_1 + U_2 + U_3)^{\frac{m+n}{2}}}$$

Denne representasjonen av  $\lambda$  bruker Zhang, Xu & Chen når den eksakte fordelingen til  $\lambda$  blir bestemt. 10 millioner simuleringer krever nå 30 millioner tilfeldige tall.

## 6. Diskusjon

Hva gjør man så når data er gitt og sannsynlighetsknoten er regnet ut?

Vel, dersom  $m = n$ , og er mindre enn eller lik 30, kan Nagar & Gupta si oss i hvilket område  $p$ -verdien befinner seg. Om f.eks.  $m = n = 20$  og  $\lambda_{\text{obs}} = 0.0379$ , forteller Tabell 1 oss at  $p$ -verdien er mellom 1 % og 5 %, og ikke noe mer. Men det kan kanskje være godt nok.

Zhang, Xu & Chen, og deres eksakte metode, kan benyttes dersom man kan håndtere programmeringsspråket R. Men da må man prøve seg fram med økende antall kvadraturpunkter for «å se når»  $p$ -verdien konvergerer. Programmet gir kun en  $p$ -verdi, og ikke prosentiler i fordelingen.

Og så var det Pearson & Neyman, som sa at  $\lambda$  er tilnærmet uniformt fordelt på (0, 1), når både  $m$  og  $n$  er store. Det vil si at  $p$ -verdien er (tilnærmet) lik verdien av  $\lambda_{\text{obs}}$ . Tallene til Nagar & Gupta, fra Tabell 1, gir vel beskjed om at  $m = n = 20$  ikke er

tilstrekkelig store. Prosentilene 0.00714, 0.04015 og 0.08446 er ikke tilnærmet lik 0.01, 0.05 og 0.10.<sup>8</sup>

Men når det kommer til stykket, og hvis man kan håndtere Python på et helt grunnleggende nivå, er nok simuleringer det enkleste. Programmet som er gitt i appendikset, gir estimater for både  $p$ -verdien og prosentiler.

## 7. Helt til slutt

Denne artikkelen handler altså om sannsynlighetskvotetesten. Det finnes en rekke andre måter å teste hypotesen om like forventningsverdier og like varianser på. En grundig presentasjon og sammenligning av ulike testmetoder er gitt av Frank & Klar (2016). Dette arbeidet er imidlertid ikke lystig lesning for en som kun har et innføringskurs i statistiske metoder, og som ønsker en praktisk løsning på sitt problem. Likevel, noen få ord kan sies.

Ronald A. Fisher har gitt oss en metode som kombinerer  $p$ -verdier fra uavhengige tester til en  $p$ -verdi for en simultan-test.<sup>9</sup> Anvendt på vårt problem bruker den de to  $p$ -verdiene,  $p_\sigma$  og  $p_\mu$ , fra testen om like varianser og fra testen om like forventningsverdier.  $\chi^2 = -2\ln p_\sigma - 2\ln p_\mu$  er kji-kvadratfordelt med 4 frihetsgrader under nullhypotesen. Nullhypotesen forkastes på 5 % nivå dersom  $\chi^2 > 9.49$ . Zhang, Xu & Chens data gir  $p_\sigma = 0.4574$ ,  $p_\mu = 0.0182$  og  $\chi^2 = 9.58$ . Dette gir så  $p$ -verdien 0.0481, altså ganske nær  $p$ -verdien fra sannsynlighetskvotetesten.<sup>10</sup>

Hvor god en test(metode) er, blir vurdert ut ifra sannsynligheten for at testen «oppdager» at nullhypotesen er feil, når nullhypotesen er feil – den såkalte teststyrken (power). Frank & Klar sier blant annet i sin diskusjon: «*In terms of power, the likelihood ratio test has the edge over the other methods at least in unbalanced situations, whereas the Fisher combination method stands out due to its simplicity.*»

## Appendiks – Simuleringsprogrammet

For å simulere kji-kvadratfordelinger i Python 2.7.10 må vi gå via gamma-fordelte variabler. Hvis  $X \sim \text{Gamma}(v/2, 1/2)$  er  $X$  også kji-kvadrat-fordelt med  $v$  frihetsgrader.

---

<sup>8</sup> Nagar & Gupta-verdiene, med  $m = n = 30$ , er 0.0080, 0.0438 og 0.0895 til 1, 5 og 10 prosentilene. Simuleringer indikerer at med 100 observasjoner i hver serie, så kan man forsvare å benytte at  $\lambda$  er uniformt fordelt på (0, 1).

<sup>9</sup> Visstnok først presentert i 4. utgave (1932) av boken *Statistical Methods for Research Workers*.

<sup>10</sup> Hvis  $p$ -verdiene fra begge testene er 0.09, vil Fishers simultane test gi at  $p$ -verdien er 0.0471. Begge hypotesene godtas med signifikansnivå lik 5 %, men simultanhypotesen forkastes på 5 % nivå.

For ikke å risikere «overflow» i de numeriske beregningene av  $\lambda$  (kvote) blir denne regnet ut via logaritmer.

```
from random import*
from math import*

def to_utvalgstest(m, n, lambda_obs, antall_simuleringer)
    m = float(m)
    n = float(n)
    antall = float(antall_simuleringer)
    telle = 0
    kvote_liste = []
    p_verdi = 0
    while telle < antall:
        U_1 = gammavariate((m-1)/2,0.5)
        U_2 = gammavariate((n-1)/2,0.5)
        U_3 = gammavariate(0.5,0.5)
        ln_teller = (m+n)/2*log(m+n)+m/2*log(U_1)+n/2*log(U_2)
        ln_nevner = m/2*log(m)+n/2*log(n)+(m+n)/2*log(U_1+U_2+U_3)
        kvote = round(exp(ln_teller - ln_nevner),5)
        if kvote <= lambda_obs:
            p_verdi = p_verdi + 1
            kvote_liste.append(kvote)
            telle = telle + 1
    p_verdi = p_verdi/antall
    kvote_liste = sorted(kvote_liste)
    cdf_kvote = []
    telle = 1
    while telle <= 100:
        cdf_kvote.append(kvote_liste[int(telle*len(kvote_liste)/100)-1])
        telle = telle + 1
    print(p_verdi, cdf_kvote[0], cdf_kvote[4], cdf_kvote[9])
    return cdf_kvote
```

Programmet kan kjøres slik at kun  $p$ -verdien til den observerte lambda og 1, 5 og 10 prosentilene skrives ut. Den fullstendige tabellen over alle prosentilene lagres i variabelen prosentiler.

```
>>> prosentiler = to_utvalgstest(20,20,0.0379,10000000)
0.0473387 0.00711 0.0402 0.08453
```

## Referanser

Frank, J., & Klar, B. *Methods to Test for Equality of Two Normal Distributions*. Statistical Methods & Applications, Vol. 25 (2016), p. 581.

Fisher, R. A. *Statistical Methods for Research Workers*. 4th ed. Oliver & Boyd, 1932. 5th ed., 1934: [Fisher\\_1.pdf \(oliverychen.github.io\)](https://oliverychen.github.io)

Jain, S. K., Rathie, P. M., & Shah, M. C. *The exact distribution of certain likelihood ratio criteria*. Sankhya A, Vol. 37 (1975), p. 150.

- Lehmann, E. L., & Romaro, J. P. *Testing Statistical Hypotheses*. 3rd ed. Springer, 2005.
- Nagar, D. K., & Gupta, A. K. *Percentage Points for Testing Homogeneity of Several Univariate Gaussian Populations*. Applied Mathematics and Computation, Vol. 156 (2004), p. 551.
- Pearson, E. S., & Neyman, J. *On the Problem of two Samples* (1930). In: Joint Statistical Papers. Eds. J. Neyman & E. S. Pearson. Cambridge University Press, 1967, p. 99.
- Zhang, L., Xu, X., & Chen, G. *The Exact Likelihood Ratio Test for Equality of Two Normal Populations*. The American Statistician, Vol. 66 (2012), p. 180–184.







---

3.

## Vitenskapelige artikler

Fagfelleurdert til nivå 1

---

---

*Peer-reviewed article*

# Banana Distributions Based on Stochastic Polar Coordinates

Tore Langholm and Harald Totland

*Norwegian Defence University College, Naval Academy, Bergen, Norway*

A tracking algorithm may employ a probability distribution for object locations at a given time after the last observation. In the two-dimensional case, such a distribution on geographical locations typically takes a curved, oblong shape, a so-called “banana distribution.”

One recently proposed version of the banana distribution assigns probabilities to the possible future locations of a moving object for which the original location, speed and direction are known, while subsequent movement is determined by a constant, unknown acceleration and a constant, unknown turn rate with independent, zero-mean Gaussian distributions.

Finding the probabilities of locations in such a distribution can be computationally demanding, since there are no functional, closed forms to recover the acceleration and turn rate that would have taken the object to a particular geographical location. In this paper we propose an approximation to the banana distributions above based on polar coordinates, where the angle out to the next observation is normally distributed with expectation zero, while the distance out to the next observation is also normally distributed, but with parameters given by two functions on the angle. This framework is computationally far more tractable, and we show that remarkably good approximations to the original banana distributions can be achieved by fine-tuning of the two functions on the angle. Finally, we show how to incorporate the additional assumption of an unknown initial direction with a Gaussian distribution.

We believe that the framework proposed here, which is closely related to the shape of the distribution, may serve as a suitable framework in which to compare the various other banana-like distributions obtained from different types of assumptions.

*Keywords: tracking, probability distribution*

---

*This article is a modified and extended version of the paper *Approximating Banana Distributions Based on Constant, Unknown Acceleration and Turn Rate*, presented at the IEEE conference *Global Oceans 2020* (DOI: 10.1109/ieeecconf38699.2020.9389326).*

# 1 Introduction

Association algorithms employed in tracking of multiple moving objects will in some manner or other utilize a probability distribution for the location of an object at a given time after the last observation. The resulting two-dimensional probability distribution on geographical coordinates will typically assume a curved, oblong shape, giving rise to the informal concept of a “banana distribution.” The precise nature of the mathematical distribution used to model the situation will depend on the original speed, elapsed time, turning characteristics, and more generally on the type of assumptions being made.

Long et al. considered a robot moving initially at a certain speed in a certain direction and with a certain curvature (or turn radius) but with its two wheels governed by continuous, stochastic processes introducing uncertainty on the subsequent movement [1]. The probability density function for its location after a certain time was approximated with a probability model where the object is assumed to be moving at constant but unknown speed and with a constant but unknown curvature. A banana distribution of the resulting type, based on constant, unknown speed and curvature with given distribution, is computationally straightforward, since the speed and curvature resulting in a given position at a particular time are easily recovered by functional, closed-form expressions.

Gade et al. proposed a somewhat different probability model in which the initial speed and direction are known, while the subsequent movement is determined by a constant, unknown acceleration and a constant, unknown turn rate (rather than turn radius), producing a so-called CAT-distribution [2]. Such assumptions can be appropriate in connection with frequent observations of moving objects, where it is reasonable to assume near constant acceleration between observations, and with objects that typically turn a constant angle per unit of time rather than per unit of distance. When the acceleration and turn rate are taken to be independent and normally distributed variables with expectation zero, this also produces a “banana shaped” distribution, but in this case the probability density values at geographical coordinates require more computation power to obtain, since there are no functional, closed forms to recover the acceleration and turn rate from the geographical position.

In situations of association and tracking, which is the primary motivation for our work, it is often crucial to have quick, real time recourse to estimates for the probability densities at a number of different locations, simultaneously for a large number of different, hypothetical scenarios. Such applications pose very high demands for the efficiency of the individual estimates. When every such estimate involves an iterative search algorithm to obtain approximate values for the generating, stochastic variables, the situation is less than ideal, and one is led to ponder if it might be possible to replace the whole model with one that is built up in a totally different way, offering functional lookup for probability density values directly from geographical coordinates, but with a net behavior closely approximating the original model.

In the present article we consider how to approximate the CAT-distribution with a model which assumes that the angle out to the next observation, relative to the original direction of movement, is normally distributed with expectation zero, and that the distance out to the next observation is also normally distributed, but with the expected value and standard deviation given by two functions on the angle. We believe that such a model, which is more directly related to the shape of the distribution, may serve as a suitable framework in which to compare the various banana-like distributions obtained from different types of assumptions, but presently we employ this only to formulate an approximation to the CAT-distribution which behaves remarkably well for a wide range of parameter settings.

## 2 Basic concepts

In the CAT-model introduced by Gade et al. [2], an object is moving at a known, initial speed  $v_0$  with an unknown, constant tangential acceleration  $a$ , in a known, original direction and with an unknown, constant turn rate  $\omega$ . A time parameter  $t$  represents the time lapse from an initial observation to the next, and has a fixed value in any given model. When the original position and direction are represented by the origin and the positive  $y$ -axis, the position of the object at time  $t$  will have the coordinates

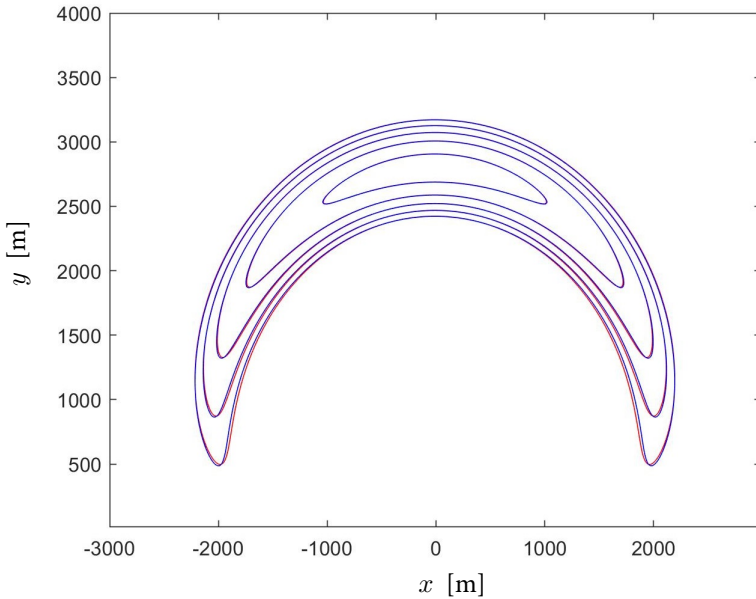
$$[x, y] = \frac{v_0}{\omega} [1 - \cos(\omega t), \sin(\omega t)] \quad (1)$$

$$+ \frac{a}{\omega^2} [\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t), \cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t) - 1].$$

Now when the two unknowns  $a$  and  $\omega$  are taken to be independent, normally distributed random variables with expectation 0 and standard deviations  $\sigma_a$  and  $\sigma_\omega$ , respectively, that is,

$$(a, \omega) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_a) \times \mathcal{N}(0, \sigma_\omega),$$

one obtains a probability model with the four parameters  $v_0$ ,  $t$ ,  $\sigma_a$  and  $\sigma_\omega$ . A contour plot for the resulting probability density function on geographical coordinates is shown in Figure 1.



**Figure 1:** Contour plot shown in blue for the CAT distribution with parameter values  $v_0 = 280$  m/s,  $t = 10$  s,  $\sigma_a = \frac{5}{3}$  m/s<sup>2</sup> and  $\sigma_\omega = \frac{\pi}{54}$  rad/s =  $\frac{10}{3}$  deg/s, which are those used by [2] in most of the examples. Blue contour lines are drawn for density values between  $10^{-6}$  m<sup>-2</sup> and  $10^{-10}$  m<sup>-2</sup>. The  $y$ -axis represents the original direction of movement. A rough, first approximation is shown in red.

Other parameter settings than those from Figure 1 yield contour plots with differently shaped bananas, but, with parameter settings going beyond certain bounds, the ba-

nana resemblance goes away. With a significant chance that the object has, by the time of the next observation, come to a complete stop and begun to reverse, the curves will lose their oblong shape, and, similarly, with a significant chance that the object has come through a very large turn of direction, say 270 degrees, the bananas start to merge at the ends. In both cases, the proposed approximations start to fail. Exactly *when* they fail is an empirical question explored in Section 6, but we identify the crucial figures here. The object has come to a stop if  $at \leq -v_0$ , which happens with significant chance if  $\frac{\sigma_a t}{v_0}$  is larger than some small number of choice around 0.25. Similarly, the change of direction  $\omega t$  has a significant chance of exceeding  $270^\circ$  when  $\sigma_\omega t$  is larger than some number of choice around  $0.25 \cdot 270^\circ$ . In Section 6 one will see that these bounds correspond roughly with the intervals considered in Figure 7.

For any geographical position with Cartesian coordinates  $(x, y)$  let  $(\varphi, r)$  be the corresponding polar coordinates, i.e., the angle  $\text{atan2}(x, y)$  relative to the positive  $y$ -axis and the distance  $\sqrt{x^2 + y^2}$  from the origin. It can be shown that the first component vector on the right side in (1) has an angle of exactly  $\frac{\omega t}{2}$  while the second component will have an angle of approximately  $\frac{2}{3}\omega t$  when  $|\omega t| < \pi$ . When  $|\frac{at}{2}|$  is small in comparison to  $v_0$ , the first component will dominate, and  $\varphi$  will be close to  $\frac{\omega t}{2}$ . A first approximation to the CAT-model using polar coordinates as the basic, random variables, will therefore assume that  $\varphi$  is normally distributed with zero mean and standard deviation  $\frac{\sigma_\omega t}{2}$ . Next it can be seen that the length of the first component vector on the right side in (1) is exactly<sup>1</sup>  $v_0 t \text{sinc}(\frac{\omega t}{2})$ , while the second can be shown to have a length of approximately  $|\frac{1}{2}at^2|$  for moderate values of  $\omega t$ , and will add or retract to the total length. A first approximation will therefore assume that the length  $r$  has an expected value of  $v_0 t \text{sinc} \varphi$  when the angle is  $\varphi$ . As for the standard deviation of  $r$  given  $\varphi$ , note that  $r = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$  when the turn rate is zero, and hence the standard deviation is  $\frac{1}{2}\sigma_a t^2$  in this case. Assuming for simplicity that  $r$  given  $\varphi$  is normally distributed with the same standard deviation for all  $\varphi$ , one obtains the following rough approximation.

ROUGH APPROXIMATION

1.  $\varphi \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}\sigma_\omega t)$
2.  $r|\varphi \sim \mathcal{N}(v_0 t \text{sinc} \varphi, \frac{1}{2}\sigma_a t^2)$

To give an impression of the goodness of this first approximation, the contour lines in the resulting probability density function were drawn in red in a layer underneath the proper CAT-distribution in Figure 1, using the same parameter values. The innermost, red contours are invisible in the figure, as they are completely covered by the blue.

Table 1 compares the probability density values and the approximations at geographical locations within the five blue contour curves, and lists the maximal error rate found within each curve together with the proportion of the probability mass within that curve.

**Table 1:** Probability mass and maximal error rate within each of the contours of Figure 1.

Contour at density level [m <sup>-2</sup> ]	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-7</sup>	10 <sup>-8</sup>	10 <sup>-9</sup>	10 <sup>-10</sup>
Total probability mass inside	58%	96%	99.6%	99.96%	99.997%
Maximal error within contour	1.4%	8%	26%	57%	108%

At this level the approximation does not look all bad, but there is considerable room for improvement. We approach this matter with a detailed look at the individual parts of

<sup>1</sup>  $\text{sinc } x$  denotes the nonnormalized function  $\frac{\sin x}{x}$ .

the rough approximation, first the approximate distribution of the angle  $\varphi$  and then the approximate distribution of the distance  $r$ .

### 3 Approximate distribution of angle

Under the CAT-distribution, the angle  $\varphi$  is a non-linear function of the acceleration  $a$  and turn-rate  $\omega$ , and therefore not normally distributed. We show in the appendix that when  $\omega t$  stays within  $\pm\pi$  and  $|at|$  is small compared to  $v_0$ ,  $\varphi$  is roughly equal to the product of the two independent variables  $\frac{\omega t}{2}$  and  $1 + \frac{at}{6v_0}$ . This product has zero expectation and standard deviation  $\frac{\sigma_{\omega t}}{2} \sqrt{1 + (\frac{\sigma_{at}}{6v_0})^2}$ . Since the factor variables are normally distributed, the product, under the assumption of a small  $\frac{\sigma_{at}}{v_0}$  ratio, behaves approximately as a normally distributed variable [3]. When  $\frac{\sigma_{at}}{v_0} < 0.2$ , the last factor in the standard deviation is approximately  $1 + \frac{1}{72} (\frac{\sigma_{at}}{v_0})^2 < 1.0006$ , and can be ignored when a very high level of precision is not needed. In the next, improved approximation, part 1 therefore remains unchanged.

### 4 Approximate distribution of distance

The conditional distribution of  $r$  when  $\varphi$  is given, is better understood in the light of some observations made in the appendix, where we show that for “moderate values”,

$$\varphi \approx \frac{\omega t}{2} \left( 1 + \frac{at}{6v_0} \right), \quad (2)$$

$$r \approx v_0 t \operatorname{sinc} \varphi + \frac{at^2}{6} (4 \operatorname{sinc} \varphi - \cos \varphi). \quad (3)$$

Thus,  $\varphi$  behaves approximately as the product of the two independent, normal variables  $\frac{\omega t}{2}$  and  $1 + \frac{at}{6v_0}$ . In [4] we consider the conditional distribution of the factor variables when the product of two independent, normal variables is known, and present results about the distribution of  $X|XY = z$  when  $X, Y$  are independent, normal variables,  $Y$  has zero mean,  $X$  has a low coefficient of variation  $\frac{\sigma_X}{\mu_X}$ , and  $z$  is not too large compared to  $\mu_X \sigma_Y$ .

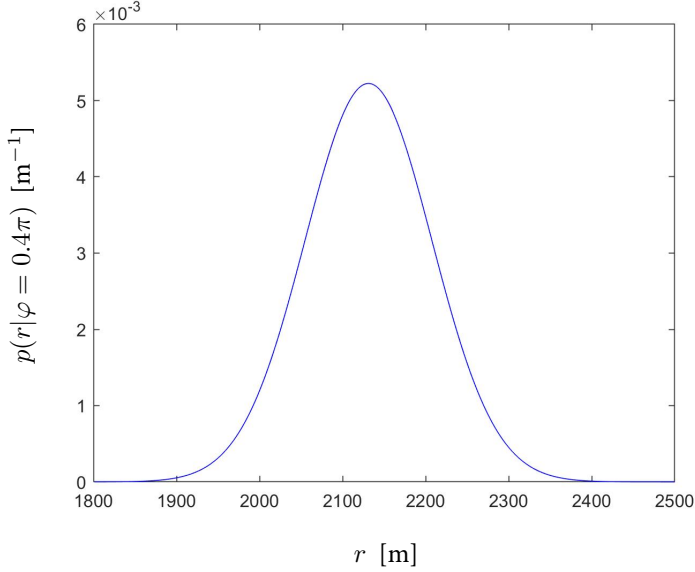
Now, there are three components to the approximation of  $r$ 's probability distribution; the use of the normal distribution and the individual approximations of the mean value and standard deviation. The three are discussed individually.

#### 4.1 Normal distribution

Of course,  $r$  is not in fact normally distributed, since it does not take negative values, but the examples examined so far have been remarkably consistent with such an assumption. Figure 2 shows the numerically computed probability density of  $r$  for  $\varphi = 0.4\pi$  drawn in blue. The normal distribution (density) with matching mean and standard deviation was drawn in red in the same figure, but is not visible behind the blue. In the interval between 1800 and 2400 m in the figure, the two computed probability densities differ by at most a quarter of a percentage of their values.

In fact, the normal distribution is no surprise in the light of [4], where, under the assumptions above, we show that the conditional distribution of  $X$  when the product  $XY$  is given, is approximately normal. Thus, (2) shows that the conditional distribution





**Figure 2:** Numerically computed conditional probability density of  $r$  for  $\varphi = 0.4\pi$ , with the parameter values from Figure 1.

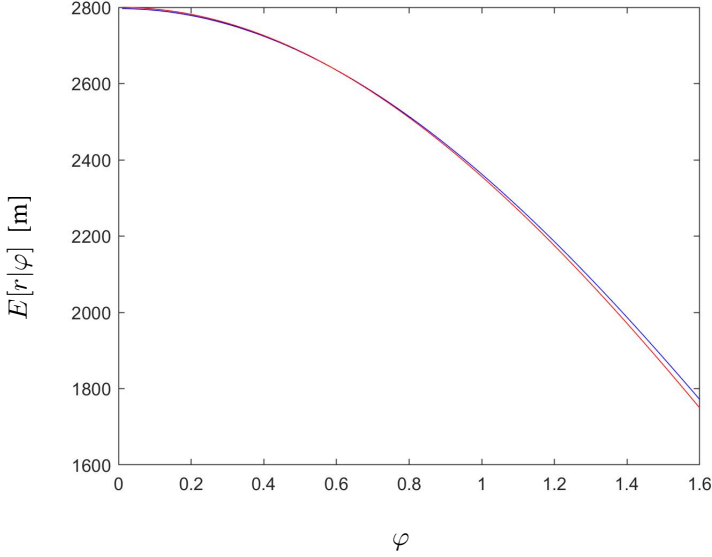
of the random variable  $1 + \frac{at}{6v_0}$  when  $\varphi$  is given, is approximately normal. Therefore, so is  $a|\varphi$  and, from (3),  $r|\varphi$  as well.

## 4.2 Expected value

The approximation  $E[r|\varphi] \approx v_0 t \operatorname{sinc} \varphi$  used above, stipulates a decrease in the expected value of  $r$  as  $\varphi$  increases in absolute value. This is because a large  $|\varphi|$  implies a curved trajectory and hence a net displacement significantly shorter than the trajectory itself. There is, however, another factor in play; large absolute values of  $\varphi$  may in part be the result of a large acceleration, which again implies a longer trajectory. Conversely, a small  $|\varphi|$  may in part be the result of a negative acceleration, with the opposite effect. So while the expected value of  $r$  does in fact decrease with higher absolute values of  $\varphi$ , the effect is smaller than implied by the rough approximation. Figure 3 shows the actual, numerically computed<sup>2</sup> expected values of  $r$  in blue and the function  $v_0 t \operatorname{sinc} \varphi$  in red, in the running example with  $v_0 = 280$ ,  $t = 10$ ,  $a \sim \mathcal{N}(0, \frac{5}{3})$  and  $\omega \sim \mathcal{N}(0, \frac{\pi}{54})$ . The difference between the curves is about 24 meters at the end of the diagram.

A better estimate for the blue curve in Figure 3 can be achieved from (2) and (3) in combination with a result in [4], where we show that under the above assumptions on

<sup>2</sup>For each angle, the probability density values in the CAT-distribution were computed at evenly distanced points on a ray with this angle. Such density values relative to Cartesian coordinates  $[x, y] = r \cdot [\sin \varphi, \cos \varphi]$  were converted to density values relative to polar coordinates  $[r, \varphi]$  by multiplication with the Jacobi determinant  $r$ , described in Section 5. The expected value of  $r$  given  $\varphi$  was then computed from these values in a straightforward way.



**Figure 3:** Numerically computed conditional expectation of  $r$  in blue compared to the function  $v_0 t \operatorname{sinc} \varphi$  in red, using the parameter values from Figure 1.

the variables  $X$  and  $Y$ ,

$$E[X|XY = z] \approx \mu_X \left(1 - \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2}\right) + \frac{\sigma_X^2 z^2}{\sigma_Y^2 \mu_X^3}. \quad (4)$$

In the present case, this implies (5) and hence also (6).

$$E \left[ 1 + \frac{at}{6v_0} \middle| \varphi \right] \approx 1 - \left( \frac{\sigma_a t}{6v_0} \right)^2 + \frac{\left( \frac{\sigma_a t}{6v_0} \right)^2 \varphi^2}{\left( \frac{1}{2} \sigma_\omega t \right)^2} \quad (5)$$

$$E[a | \varphi] \approx \frac{\sigma_a^2 t}{6v_0} \left( \frac{\varphi^2}{\left( \frac{1}{2} \sigma_\omega t \right)^2} - 1 \right) \quad (6)$$

Here it is worth noticing that the conditional mean of  $a$  is positive for  $|\varphi| > \frac{\sigma_\omega t}{2}$  and negative for  $|\varphi| < \frac{\sigma_\omega t}{2}$ .

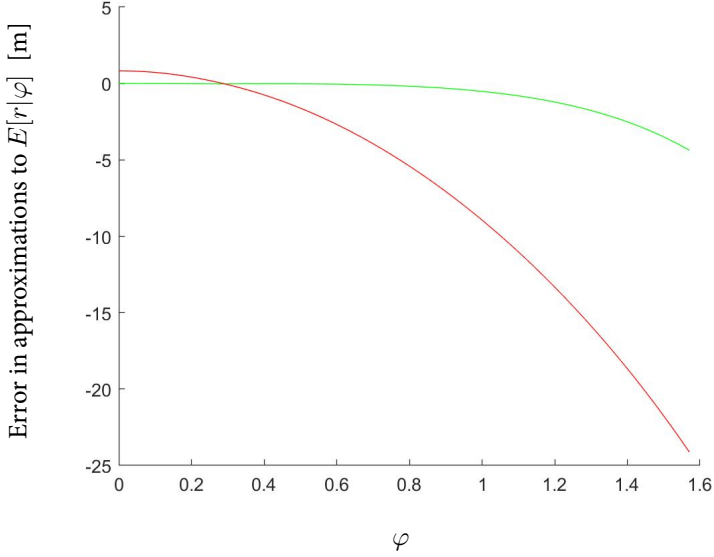
Applying (6) to (3) and introducing the notation

$$\operatorname{scc} \varphi = \frac{1}{3} (4 \operatorname{sinc} \varphi - \cos \varphi) \quad (7)$$

yields the approximation  $P_\mu(\varphi)$  for the mean of  $r$  when  $\varphi$  is given.

$$P_\mu(\varphi) = v_0 t \operatorname{sinc} \varphi + \frac{\sigma_a^2 t^3}{12v_0} \left( \frac{\varphi^2}{\left( \frac{1}{2} \sigma_\omega t \right)^2} - 1 \right) \operatorname{scc} \varphi \quad (8)$$

The curve for this expression compares much better with the computed curve for the mean, cf. Figure 4.



**Figure 4:** Errors in meters when approximating  $E[r|\varphi]$  with the functions  $v_0 t \text{sinc } \varphi$  (red) and  $P_\mu(\varphi)$  (green). The parameter values are those from Figure 1.

### 4.3 Standard deviation

In the first, rough approximation,  $r|\varphi$  has a standard deviation that does not depend on  $\varphi$ . Numerical computations show that this is not accurate; Figure 5 graphs the standard deviations of these various probability distributions along the vertical axis against the given values of  $\varphi$  along the horizontal axis, with the values decreasing significantly when  $\varphi$  runs from 0 to  $\frac{\pi}{2}$ .

In [4] we show that under the above assumptions on the variables  $X$  and  $Y$ ,

$$SD[X|z] \approx \sigma_X \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\sigma_X^2}{\mu_X^2} \right) - \frac{3}{2} \frac{\sigma_X^3 z^2}{\sigma_Y^2 \mu_X^4}. \quad (9)$$

In the present case, it follows that the conditional standard deviation of  $1 + \frac{at}{6v_0}$  when  $\varphi$  is given, is

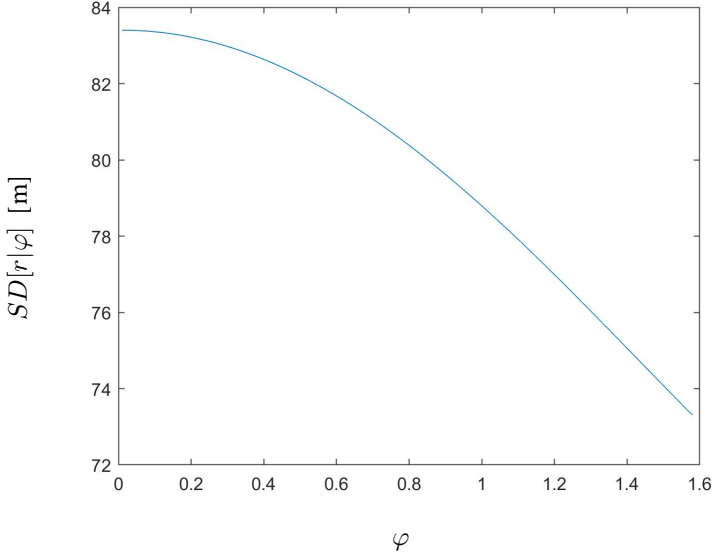
$$SD \left[ 1 + \frac{at}{6v_0} \middle| \varphi \right] \approx \frac{\sigma_a t}{6v_0} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_a t}{6v_0} \right)^2 \right) - \frac{3}{2} \frac{\left( \frac{\sigma_a t}{6v_0} \right)^3 \varphi^2}{\left( \frac{1}{2} \sigma_\omega t \right)^2},$$

yielding a conditional standard deviation for  $a$  of

$$SD[a|\varphi] \approx \sigma_a \left( 1 + \frac{\sigma_a^2}{6v_0^2} \left( \frac{t^2}{12} - \frac{\varphi^2}{\sigma_\omega^2} \right) \right), \quad (10)$$

and – using (3) – a conditional standard deviation for  $r$  of approximately

$$P_\sigma(\varphi) = \frac{\sigma_a t^2}{2} \left( 1 + \frac{\sigma_a^2}{6v_0^2} \left( \frac{t^2}{12} - \frac{\varphi^2}{\sigma_\omega^2} \right) \right) \text{scc } \varphi. \quad (11)$$



**Figure 5:** The function  $SD[r | \varphi]$ , numerically computed using the parameter values in Fig. 1.

We keep the term with  $\sigma_a^2$  in (11), as well as in (8), although a similar term was neglected in the approximation for  $\sigma_\varphi$ ; the reason lies in a difference in relative importance.

## 5 Use of improved approximation

Using the expressions (8) and (11) for the mean and standard deviation of  $r$  given  $\varphi$ , we obtain an improved approximation for the CAT distribution.

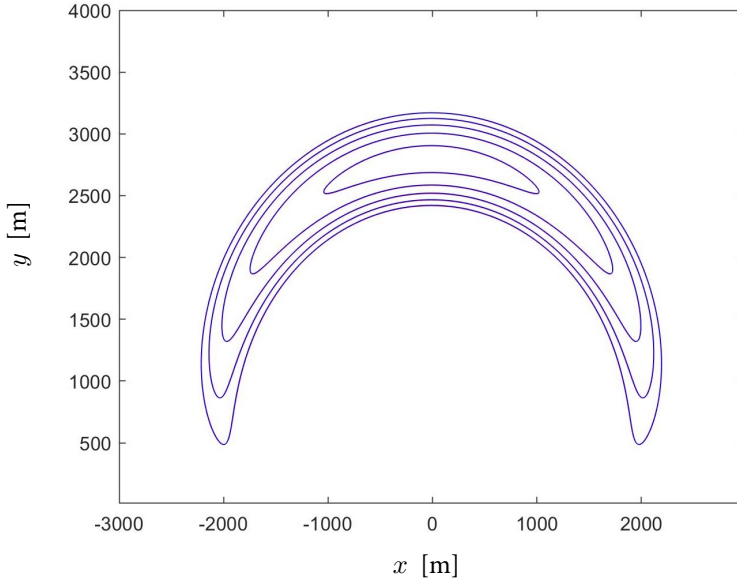
### IMPROVED APPROXIMATION

1.  $\varphi \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}\sigma_\omega t)$
2.  $r|\varphi \sim \mathcal{N}(P_\mu(\varphi), P_\sigma(\varphi))$

Cartesian coordinates  $[x, y]$  can be found from polar coordinates  $[\varphi, r]$  as  $[x, y] = r \cdot [\sin \varphi, \cos \varphi]$ , with Jacobi determinant  $\begin{vmatrix} r \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = r$ . If the rough approximation had been accurate, the probability density function on Cartesian coordinates would be

$$p_0(x, y) = \frac{1}{r} g(\varphi; 0, \frac{1}{2}\sigma_\omega t) \cdot g(r; v_0 t \operatorname{sinc} \varphi, \frac{1}{2}\sigma_a t^2)$$

where  $g(x; \mu, \sigma)$  is the normal probability density function  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$  and  $\varphi, r$  are obtained from  $x, y$  as above. This is how the red contours in Figure 1 were produced. Using the functions  $P_\mu, P_\sigma$  instead, one obtains the probability density function  $p_1(x, y)$



**Figure 6:** Contour plot shown in blue for the CAT distribution with the parameter values from Figure 1. The contour lines are drawn for density values between  $10^{-6} \text{m}^{-2}$  and  $10^{-10} \text{m}^{-2}$ . Corresponding contours for the improved approximation were drawn in red, but are not visible from under the blue.

of the improved approximation,

$$p_1(x, y) = \frac{1}{r} g(\varphi; 0, \frac{1}{2} \sigma_\omega t) \cdot g(r; P_\mu(\varphi), P_\sigma(\varphi)).$$

Figure 6 shows contour lines in the density functions for two banana distributions; for the improved approximation in red, and for the genuine CAT-distribution in blue. This time, the red is completely covered by the blue. Table 2 lists the computed percentages of the total probability mass inside each of the contours, and the maximal error rate of the approximations relative to exact density values within each of the contours. Since the values on neighbouring contour lines differ by 900%, the maximal difference of a mere 6.6% in the table is not visible at this level.

**Table 2:** Probability mass and maximal error rate within each of the contours of Figure 6.

Contour at density level [ $\text{m}^{-2}$ ]	$10^{-6}$	$10^{-7}$	$10^{-8}$	$10^{-9}$	$10^{-10}$
Total probability mass inside	58%	96%	99.6%	99.96%	99.997%
Maximal error within contour	0.06%	0.22%	0.64%	2.6%	6.6%

## 6 Goodness of approximation with different parameter settings

### 6.1 Choice of measure

The rough and improved approximations presented above were both formulated and presented for use with different settings of the four parameters  $v_0, t, \sigma_\omega$  and  $\sigma_a$ , while Table 2 only reflects the behaviour with respect to one particular parameter setting. To see how the improved approximation fares for the wider range of parameter settings, it is convenient to focus on a single metric for the goodness of the approximations. The Bhattacharyya coefficient is such a single measure that is often used to compare probability distributions, but for present purposes we have designed a measure that indicates in a more direct way in which cases the error of approximation is acceptable. The measure we use asks how far out in the distribution it is possible to go before a 5% discrepancy between the actual and the approximate probability density value is encountered. The question is answered by inspecting discrepancies between approximations and exact values inside ever wider contour lines in the density function until a 5% discrepancy is found, and then computing the probability mass inside this particular contour line. From Table 2, it can be seen that the figure must be somewhere between 0.9996 and 0.99997 in the case of the default settings from Figure 1. The true value is approximately 0.99992; this means that inside a geographical area that has a probability of 0.99992 of containing the object, and whose boundary is a contour line for the probability density  $p(x, y)$ , the estimated probability density value nowhere deviates from the true figure by more than 5% of its value.<sup>3</sup> Association algorithms will typically disregard any observations falling outside of such an area, and a 5% error in the estimated probability density value is well within the acceptable in most cases. The next task is to determine under which other possible settings of the model parameters does the approximation offer a similarly acceptable behavior.

### 6.2 Variation of parameters

To find how the approximations fare for different parameter values it is, fortunately, not necessary to vary all four parameters  $v_0, t, \sigma_a, \sigma_\omega$  independently. To see this, note that the position vector in (1) can be written on the form  $v_0 t A$ , where  $A$  only contains  $v_0, t, a$  and  $\omega$  inside the subexpressions  $\omega t$  and  $\frac{at}{v_0}$ , and similarly that  $P_\mu(\varphi)$  and  $P_\sigma(\varphi)$  can both be written on the form  $v_0 t B$ , where  $B$  only contains  $v_0, t, \sigma_a$  and  $\sigma_\omega$  inside the subexpressions  $\sigma_\omega t$  and  $\frac{\sigma_a t}{v_0}$ . The values of  $\sigma_\omega t$  and  $\frac{\sigma_a t}{v_0}$  therefore determine the behaviour of both the CAT-distribution and the approximation, while the product  $v_0 t$  only gives the scale and has no bearing on the measure outlined above. To evaluate the approximations for various parameter values, it is thus sufficient to vary  $\sigma_\omega t$  and  $\frac{\sigma_a t}{v_0}$ .

<sup>3</sup>Less formally; the largest “banana” inside of which the probability density is guaranteed to be estimated with an error not exceeding 5%, has a likelihood of 0.99992 of containing the object. The whole (not necessarily banana-shaped) region in which the estimation error stays within this bound, will in general be larger and in this case contains 0.99999 of the probability mass. It is possible to define an alternative similarity measure based on the existence of such arbitrarily shaped regions (i.e., non-bananas) with some density values on the inside falling below corresponding values on the outside. Such an alternative measure will always yield figures as least as good as those achieved by our chosen measure, but we consider this original measure more intuitive.

Note also the connection between these measures and the Bhattacharyya coefficient, which in the present example will be at least  $\iint_D \sqrt{p(x, y) \cdot 0.95 p(x, y)} dA = \sqrt{0.95} \iint_D p(x, y) dA = \sqrt{0.95} \cdot 0.99999$ , where  $D$  is a region containing 0.99999 of the probability mass.



where, as before,  $\varphi$  is the deviation from the initial direction (but no longer denotes a polar coordinate). We assume that  $\varphi$  and  $r$  are independent of  $\theta_0$  and are distributed as in the previous sections. Furthermore, we assume that  $\theta_0$  is normally distributed with mean 0 and standard deviation  $\sigma_0$ .

The extended model presents some additional challenges for the numerical computation of the probability density function  $p(r, \theta)$ , but building upon the approximations above, we will show that our framework is well suited for handling the added complication. Indeed, the approximation

$$\varphi \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varphi), \quad \sigma_\varphi = \frac{1}{2} \sigma_\omega t,$$

together with the assumption for  $\theta_0$ , immediately gives

$$\theta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\theta), \quad \sigma_\theta^2 = \sigma_0^2 + \sigma_\varphi^2.$$

The distribution of  $r|\theta$  remains to be found. It follows from Theorem 1.4.2 in [5] that if  $Z = X + Y$  is the sum of two independent, normally distributed random variables with mean 0, then  $X|Z = z$  is normally distributed with mean  $z\sigma_X^2/\sigma_Z^2$  and standard deviation  $\sigma_X\sigma_Y/\sigma_Z$ . Thus, to a good approximation,

$$\varphi|\theta \sim \mathcal{N}(\bar{\theta}, \bar{\sigma}), \quad (12)$$

where

$$\bar{\theta} = \frac{\theta\sigma_\varphi^2}{\sigma_\theta^2} = \frac{\theta}{1 + 4\sigma_0^2/\sigma_\omega^2 t^2}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_0\sigma_\varphi}{\sigma_\theta} = \left( \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{4}{\sigma_\omega^2 t^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Note that  $\bar{\sigma} \leq \min(\sigma_0, \sigma_\varphi)$ .

By the law of total probability,

$$p(r|\theta) = \int d\varphi p(r|\theta, \varphi) p(\varphi|\theta) = \int d\varphi p(r|\varphi) p(\varphi|\theta), \quad (13)$$

since  $r$  is independent of  $\theta$  when  $\varphi$  is given. As discussed in Section 4,  $r|\varphi$  is very close to being normally distributed. With this in mind, (12) and (13) show that the distribution of  $r|\theta$  is approximately normal if  $\bar{\sigma}$  is small.<sup>4</sup>

By the law of total expectation,

$$E[r|\theta] = \int d\varphi E[r|\theta, \varphi] p(\varphi|\theta) = \int d\varphi E[r|\varphi] p(\varphi|\theta).$$

With the approximation from Section 4 and (12) we have

$$E[r|\theta] \approx \int d\varphi P_\mu(\varphi) g(\varphi; \bar{\theta}, \bar{\sigma}). \quad (14)$$

By the same argument,

$$E[r^2|\theta] \approx \int d\varphi (P_\mu(\varphi)^2 + P_\sigma(\varphi)^2) g(\varphi; \bar{\theta}, \bar{\sigma}).$$

---

<sup>4</sup>To see this in detail, note that the integral in (13) can be evaluated approximately by assuming that the mean of the near-Gaussian function  $p(r|\varphi)$  varies linearly with  $\varphi$  around  $\bar{\theta}$  while the standard deviation is constant. With  $E[r|\varphi] = k\varphi + b$  and  $SD[r|\varphi] = c$ , the integrand can be rewritten as  $g(r - k\varphi; b, c)|k|g(k\varphi; k\bar{\theta}, |k|\bar{\sigma})$ . The integral is thus converted into a convolution of two Gaussians, yielding another Gaussian in  $r$ .



Replacing  $P_\mu(\varphi)$  in (14) by its second-order Taylor polynomial around  $\varphi = \bar{\theta}$  leads to

$$E[r|\theta] \approx P_\mu(\bar{\theta}) + \frac{1}{2}P_\mu''(\bar{\theta})\bar{\sigma}^2. \quad (15)$$

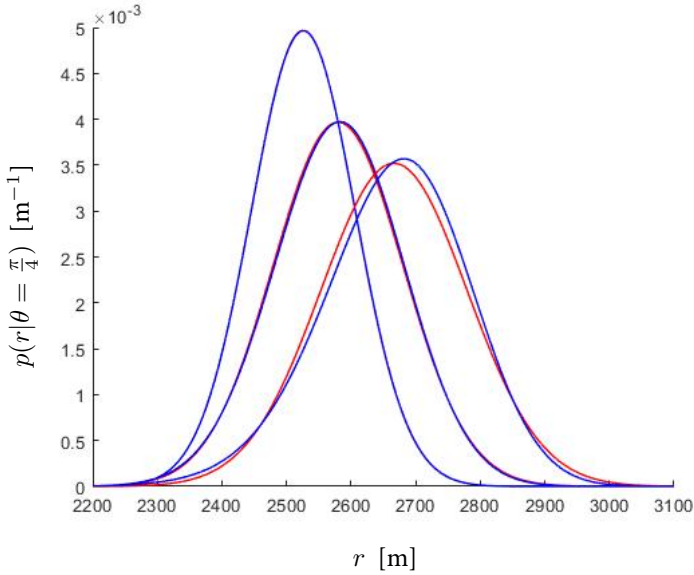
Similarly (suppressing the argument  $\bar{\theta}$ ),

$$E[r^2|\theta] \approx P_\mu^2 + P_\sigma^2 + ((P_\mu')^2 + P_\mu P_\mu'' + (P_\sigma')^2 + P_\sigma P_\sigma'') \bar{\sigma}^2.$$

From the previous two equations (and dropping terms of fourth order in  $\bar{\sigma}$  and  $\frac{\sigma_a t}{v_0}$ ), an approximation for the conditional variance is given by

$$SD[r|\theta]^2 \approx P_\sigma(\bar{\theta})^2 + P_\mu'(\bar{\theta})^2 \bar{\sigma}^2. \quad (16)$$

Figure 8 shows the effect of a normally distributed initial direction, using the parameter values in Figure 1. The blue curve to the left shows the numerically computed conditional probability density  $p(r|\theta = \frac{\pi}{4})$  in the case  $\sigma_0 = 0$ . Underneath, barely visible in red, is a normal distribution with mean and standard deviation given by (15) and (16) (which in this case simplify to the approximations in Section 4). Corresponding curves are shown for  $\sigma_0 = \frac{\pi}{30}$  (middle) and  $\sigma_0 = \frac{\pi}{15}$  (right). It should be noted that the above formulas for the conditional mean and standard deviation give results whose deviations from the numerically computed values are well below 1 meter in all three cases; the slight visible difference between a blue and a red curve is purely due to deviation from normality in the blue one.



**Figure 8:** Numerically computed conditional probability density of  $r$  for  $\theta = \frac{\pi}{4}$  (blue) with the parameter values from Figure 1 and a standard deviation in the initial direction of (from left to right)  $\sigma_0 = 0$ ,  $\frac{\pi}{30}$ , and  $\frac{\pi}{15}$ . The three corresponding approximations (red, printed below the blue) are normal distributions based on (15) and (16).

Equation (16), whose two terms on the right-hand side are of second order in  $\frac{\sigma_a t}{v_0}$  and  $\bar{\sigma}$ , respectively, can be improved by including terms of the next order. With the additional term  $\frac{1}{8}P_\mu^{(4)}(\bar{\theta})\bar{\sigma}^4$  in (15) and corresponding terms in the expansion for  $E[r^2|\theta]$ ,

the omitted fourth-order terms in (16) are found to be

$$\left((P'_\sigma)^2 + P_\sigma P''_\sigma\right) \bar{\sigma}^2 + \left(\frac{1}{2}(P''_\mu)^2 + P'_\mu P'''_\mu\right) \bar{\sigma}^4,$$

where the functions are evaluated at  $\bar{\theta}$ . These correction terms are insignificant in the case in the middle of Figure 8, while in the rightmost case, where  $\bar{\sigma}$  is twice as large, they help to improve the estimate of  $SD[r|\theta]$ , reducing the deviation from the numerically computed value from about 70 cm to only 5 cm.

## Conclusion

We have seen that the use of a simple type of stochastic polar coordinates based on normal distributions to compute probability densities of banana distributions is both computationally tractable, closely related to the geometry of the distribution, and, in a wide range of situations, remarkably accurate.

## Acknowledgments

We would like to thank our colleague Knut Meen at the Norwegian Naval Academy, and Brita Gade, Carina Vooren, Morten Kloster, and Ole Halvard Sætran at the Norwegian Defence Research Establishment for inspiring discussions and valuable suggestions. We also thank the anonymous referees for useful comments.

## References

- [1] A. W. Long, K. C. Wolfe, M. J. Mashner, and G. S. Chirikjian, “The Banana Distribution is Gaussian: A Localization Study with Exponential Coordinates,” in N. Roy, P. Newman, and S. Srinivasa (Eds.), *Robotics: Science and Systems VIII*, MIT Press, 2013, pp. 265-272.
- [2] B. H. H. Gade, C. N. Vooren, and M. Kloster, “Probability Distribution for Association of Maneuvering Vehicles,” 2019 22th International Conference on Information Fusion (FUSION), Ottawa, ON, Canada, 2019, pp. 1-7.
- [3] L. A. Aroian, “The Probability Function of the Product of Two Normally Distributed Variables,” *The Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 18, No. 2 (Jun., 1947), pp. 265-271.
- [4] H. Totland and T. Langholm, “Deformed Normal Distributions,” forthcoming.
- [5] P. J. Bickel and K. A. Doksum, *Mathematical Statistics*, Prentice Hall, 1977.

## Appendix

**Proposition 1.** For  $|\omega t| < \pi$  and  $|\frac{at}{v_0}| \ll 1$ ,

$$\varphi \approx \frac{\omega t}{2} \left(1 + \frac{at}{6v_0}\right).$$

*Proof.* With

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \cos(\omega t), & x_2 &= \frac{1}{\omega} (\sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t)), \\ y_1 &= \sin(\omega t), & y_2 &= \frac{1}{\omega} (\cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t) - 1), \end{aligned}$$

we can write

$$\varphi = \text{atan2} \left( x_1 + \frac{a}{v_0} x_2, y_1 + \frac{a}{v_0} y_2 \right).$$

The first-order Taylor polynomial in  $\frac{a}{v_0}$  of this expression is

$$\text{atan2}(x_1, y_1) + \frac{a}{v_0} \cdot \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2},$$

where the second term equals

$$\begin{aligned} & \frac{a}{v_0} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{2 - 2 \cos(\omega t) - \omega t \sin(\omega t)}{2 - 2 \cos(\omega t)} \\ &= \frac{a}{v_0} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \left( 1 - \frac{\omega t}{2} \cot \left( \frac{\omega t}{2} \right) \right) \\ &= \frac{at}{2v_0} \cdot \left( \frac{1}{\frac{\omega t}{2}} - \cot \left( \frac{\omega t}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Now  $\text{atan2}(x_1, y_1) = \frac{\omega t}{2}$ , while  $\frac{1}{x} - \cot x \approx \frac{\pi}{3}$  for  $|x| < \frac{\pi}{2}$ , so

$$\varphi \approx \frac{\omega t}{2} + \frac{at}{2v_0} \cdot \frac{\omega t}{3} = \frac{\omega t}{2} \left( 1 + \frac{at}{6v_0} \right).$$

□

**Proposition 2.** For  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$  and  $|\frac{at}{v_0}| \ll 1$ ,

$$r \approx v_0 t \text{sinc } \varphi + \frac{at^2}{6} (4 \text{sinc } \varphi - \cos \varphi).$$

*Proof.* First note that

$$r \approx v_0 t \text{sinc} \left( \frac{\omega t}{2} \right) \cdot \left( 1 + \frac{at}{2v_0} \right). \quad (17)$$

This can be shown by obtaining

$$r = v_0 t \frac{\text{sin}(\frac{\omega t}{2})}{\frac{\omega t}{2}} \sqrt{\left( 1 + \frac{at}{2v_0} \right)^2 + \left( \frac{at}{2v_0} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{\frac{\omega t}{2}} - \cot \frac{\omega t}{2} \right)^2}$$

from (1) by standard trigonometric identities, and then expanding in powers of  $\frac{at}{2v_0}$ . Next we observe that

$$\text{sinc} \left( \frac{\omega t}{2} \right) \approx \text{sinc } \varphi - \frac{at}{6v_0} (\cos \varphi - \text{sinc } \varphi). \quad (18)$$

This follows by noting that Proposition 1 also implies that  $\frac{\omega t}{2} \approx \varphi \left( 1 - \frac{at}{6v_0} \right)$  when  $|\frac{at}{6v_0}| \ll 1$ , and that the first-order Taylor polynomial of  $\text{sinc}(\varphi + \delta)$  around  $\varphi$  is  $\text{sinc } \varphi + \delta \cdot \frac{\cos \varphi - \text{sinc } \varphi}{\varphi}$ .

Finally, substituting (18) into (17), multiplying out and deleting second-order terms in  $\frac{at}{v_0}$ , one obtains the proposition. □



---

Seksjon for

# Sjømilitær teknologi

Forsvarets høgskole, Sjøkrigsskolen

---

Seksjon for

# Sjømilitær teknologi

Forsvarets høgskole, Sjøkrigsskolen



Atle Mølholm

*Kommandørkaptein | Seksjonssjef sjømilitær teknologi*

Tok over som seksjonssjef august 2019. Mastergrad i informatikk. Graduerte fra Sjøkrigsskolen i 1993, og tjenestegjorde i ubåttjenesten om bord i våpenteknisk detalj i åtte år, siste fire som Våpenteknisk offiser. Har hatt analyseoffiserstillingene for sonar og våpen, hovedinstruktør taktisk Ula-simulator på Ubåtskolen og vært prosjektoffiser i Ubåttstaben og midlertidig nestkommanderende i ubåttjenesten.



Terje Fykse

*Høgskolelektor i elektrofag*

Ansatt på Sjøkrigsskolen siden 1991. Hovedlærer i våpentekniske fag. Utdannet sivilingeniør i elektro/automatisering. Undervisning i emner innen elektroteknikk, reguleringsteknikk, instrumentering og styringsteknikk. Har jobbet som prosjektingeniør i Siemens før ansettelse på Sjøkrigsskolen og senere i en periode han hadde permisjon. Oppgaver i Siemens var innen automatisering for offshore, skip og prosessindustri. Han hadde bl.a. ansvaret for styring og overvåkning av skipstekniske systemer på Ula-klassen ubåter.



Linn-Kristine Glesnes Gaupholm

*Førsteamanuensis i fysikk*

Ansatt ved Sjøkrigsskolen juni 2017 for å undervise fysikk. Tok doktorgrad i romfysikk ved Universitetet i Bergen (2016), der hun var en del av forskningsmiljøet som undersøker atmosfæriske effekter forårsaket av partikkelnedbør fra sola. Før det tok hun integrert lektorutdanning med mastergrad i romfysikk, også ved UiB (2013).

---



Hans Magne Gloppen  
*Høgskolelektor i nautikk*

Ansatt på Sjøkrigsskolen fra høsten 2021. Maritim kandidat fra NTNU 2000. Praktisk pedagogisk utdanning (PPU) fra Høgskolen i Bergen 2005. Utdannet sjøkaptein ved Fiskeriteknisk høyskole i Møre og Romsdal 1991. Praksis fra fiskeri (fisker og produksjonsformann), offshore (overstyrmann og on-line surveyor), buksering/eskorting Mongstad og Sture (overstyrmann) og som lektor i skoleverket. Har undervist i nautikk ved fagskolen i Hordaland i to perioder (2001-2007, 2019-2021) og ved Sjøkrigsskolen 2007-2019. Har undervisningserfaring i alle STCW-emner. Spesialfelt skipsteknikk og lasting/lossing.

---



Josipa Kovačić  
*Høgskolelektor i maskinfag*

Nytilsatt høgskolelektor i maskinfag. Har bachelor- og mastergrad innen mekanisk konstruksjon fra Universitetet i Zagreb, Kroatia. Erfaring blant annet som maskiningeniør med konstruksjon, design, teknisk dokumentasjon og produksjonsstøtte hos kranprodusenten Palfinger Marine Norway AS. Vikar ved FHS/Sjøkrigsskolen med undervisning i emnet Drift og vedlikehold av marint maskineri, høsten/vinteren 2020/21.

---



Ellen Margit Krätzig-Berle  
*Førstelektor i matematikk*

Har jobbet på Sjøkrigsskolen siden 1984 med undervisning i matematikk og statistikk. Utdannelse fra Universität Mainz i Tyskland, med graden Diplom-Mathematiker i 1983 i ren matematikk med tyngdepunkt i tallteori. Timelærer ved Universitetet i Bergen, Norges Handelshøyskole, Bergen Private Gymnas, i perioden 1985-2000.

---



Tore Langholm  
*Professor i matematikk*

Ansatt ved Sjøkrigsskolen siden 2008. Underviser i matematiske emner. Har hovedfag i matematikk fra Universitetet i Oslo 1983 og doktorgrad fra Stanford University 1987. Har tidligere vært ansatt som forsker ved Universitetet i Oslo, førsteamanuensis ved Universitetet i Bergen, og professor ved Universitetet i Oslo.

---



Christophe Massacand  
*Førsteamanuensis i fysikk og informasjonsteknologi*

Ansatt ved Sjøkrigsskolen siden 2008. Underviser i emner innen generell fysikk, elektromagnetisme, ballistikk, sensorteori, maskinlæring, Linux og datanettverk. Diplom (1989) og doktorgrad (1993) i teoretisk fysikk ved ETH Zürich, Sveits. Postdoktor i astrofysikk ved Universitetet i Tromsø (1994-1996). Har siden 1997 jobbet i seismisk industri, først som prosjektleder i geofysikkgruppen om bord på seismikkfartøy, senere på land som leder med ansvar for kvalitetskontroll av seismiske data og for FoU-prosjekter.

---



Knut Meen  
*Førstelektor i matematikk, pensjonert i desember 2020*

Ansatt på Sjøkrigsskolen fra 2000 til 2020. Cand.real. fra Universitetet i Bergen 1978. Pedagogisk seminar 1981. Sivil verneplikt 1978-1979. Tidligere arbeidsplasser: Matematisk institutt, Universitetet i Bergen, 1979-1986. Seksjon for medisinsk statistikk og informatikk, Universitetet i Bergen, 1986. FFV Aune, 1987. Askøy videregående skole, 1987-2000. Timelærer ved BI i Bergen og UiB i perioden 1988-2005.

---



Alexander Sauter  
*Førsteamanuensis i elektrofag/automasjon*

Ansatt ved Sjøkrigsskolen siden 2016. Brei tverrfaglig utdanning innen realfag med master (Diplom) i fysikk fra Universitetet i Heidelberg, Tyskland, og PhD fra Universitetet i Bergen. Har undervist i elektroteknikk, sensorteori, automatiserte systemer og ingeniørfaglig systemtenkning. Bestyrer for automasjonslaboratoriet.

---



Gisle Strand  
*Høgskolelektor i skipsteknikk*

Ansatt ved Sjøkrigsskolen siden 1999. Hovedlærer for maskinlinjen, med ansvar for maskin- og skipstekniske fag. Hovedoppgave innen undervisning og bestyrer for skolens maskintekniske laboratorier. Utdannet marineingeniør ved Sjøkrigsskolens maskinlinje og sivilingeniør innen hydrodynamikk og konstruksjon ved NTNU. Etterutdanning innen marinefartøyers konstruksjon og overlevelsesevne ved MIT/US Navy. Tjeneste som maskinoffiser i MTB- og Fregattvåpenet og som marineingeniør ved skrogkontoret til Sjøforsvarets Forsyningskommando (SFK).

---





Arild Sæbø  
*Høgskolelektor i elektrofag*

Ansatt på Sjøkrigsskolen siden 2008. Hovedlærer innen elkraft og skips-elektriske anlegg. Hovedoppgave innen undervisning og bestyrer for skolens elkraft- og høyspenningslaboratorier. Utdannet sivilingeniør innen elkraft ved NTNU. Tjenesteerfaring som elektrooffiser i ubåt-våpenet, teknisk saksbehandler elektro i Forsvarets logistikkorganisasjon og disiplinleder innen elektro i fregattprosjektet.



Harald Totland  
*Førsteamanuensis i fysikk*

Ansatt ved Sjøkrigsskolen siden 2000. Underviser i dynamikk, statikk, fasthetsanalyse, ballistikk, hydrodynamikk, sensorteori og elektromagnetisme. Hovedfag (graden Diplom-Physiker) innen matematisk fysikk fra Universitetet i Freiburg, Tyskland, og doktorgrad (dr.scient.) innen nanofysikk fra Universitetet i Oslo. Har tidligere jobbet i Seksjon for matematikk fagdidaktikk i Avdeling for lærerutdanning på Høgskolen i Bergen. Også førsteamanuensis II i havteknologi ved Institutt for fysikk og teknologi, Universitetet i Bergen.



Frode Wikne  
*Avdelingsingeniør/laborant*

Ansatt på Sjøkrigsskolen siden 2016. Jobber med det meste innen laboratoriene. Fagbrev som kjølemontør (2000), utdanning maskin-ingeniør fra Høgskolen i Bergen (2004-2007). Jobbet med kjemi, prosess og mekanisk samt 3D-modellering (ProEngineer) i Weyland AS (2007-2013), og med prosessanlegg og 3D-modellering (SolidWorks) i AMOF Fjell Prosess Technology AS (2014-2015).

---

# “Navigare necesse est, vivere non necesse”

CDR s.g. (ret.) Roar Espevik  
*Founder of Necesses*

The quote is attributed to Pompey (56 BC), who used it to urge his sailors on when they refused to set sail on a stormy sea, in order to bring grain from Africa to Rome where people were starving. This is a task familiar to every naval officer: to do his or her duty to society when the situation demands it, is more crucial than own survival. The quote means, literally, “It is necessary to sail, it is not necessary to live”. This means that it is necessary to depart, even if you are not at all sure that you will ever arrive.

It is more “necesses” than ever that we set sail within the academic world. The picture on this last page, the possible monster, Nessie of Loch Ness, symbolizes our quest for knowledge within the naval domain. What is truth? With what kind of certainty can we claim to know the truth? These are central questions whether dealing with a monster or with naval warfare. It is an ongoing process that makes us wiser but not certain. The Royal Norwegian Naval Academy dates back 200 years and the purpose of our magazine is to put our competence, or sometimes even the lack of it, out into the open for debate. We have a threefold wish; to invite to debate and reflection, to present competent arguments, and to publish knowledge gained through peer reviewed research. In short, we have a deep desire to present through “Necesses” our latest academic thoughts, research and efforts concerning anything that is important to a naval officer. “Necesses” will include scientific articles, especially brilliant bachelor papers by our cadets, and works of scholars at our own Academy or others writing within the naval officer sphere.

