

# NECESSE

ROYAL NORWEGIAN NAVAL ACADEMY  
MONOGRAPHIC SERIES

VOLUME 2 ISSUE 3 2017

## Realfag og teknologi for marineoffiseren

→ [Innholdsfortegnelse](#)





«Necesse» kommer i fem utgivelser hvert år. Skriftserien har en fagredaktør for hver utgivelse, samt hovedredaktør. Samlet, under hovedoverskriften sjømilitær profesjonskompetanse, har vi en tverrfaglig tilnærming hvor fem sjømilitære fagfelt: militær logistikk, maritime operasjoner, maritim militær teknologi, sjømilitært lederskap og militær navigasjon, har hvert sitt nummer i løpet av et år. Alle synspunkter i denne publikasjon står for forfatterens egen regning. Hel eller delvis gjengivelse av innholdet kan bare skje med forfatterens samtykke.

*Roar Espevik*

2017 © Sjøkrigsskolen  
PB 5 Haakonsværn, 5886 BERGEN

ISSN 2464-353X  
ISBN 978-82-93550-13-6 (elektronisk utgave)

Tittel: Necesse  
Royal Norwegian Naval Academy monographic series  
Volume 2, Issue 3, 2017  
Undertittel: Realfag og teknologi for marineoffiseren  
Foto omslag: <http://www.scotlandnow.dailyrecord.co.uk>

Hovedredaktør: Roar Espevik  
Fagredaktør: Dagfinn Andreassen

Omslag og layout: Katrine Austgulen, HOS Grafisk  
Trykk: HOS Grafisk, Sjøkrigsskolen



# NECESSE

ROYAL NORWEGIAN NAVAL ACADEMY  
MONOGRAPHIC SERIES

VOLUME 2 ISSUE 3 2017

Realfag og teknologi  
for marineoffiseren



# Innhold

## Del 1

ARTIKLER FRA STABEN

- 18 Sannsynlighetsgenererende funksjoner i praktisk sannsynlighetsregning  
Sannsynlighetsgenererende funksjoner er et nyttig hjelpemiddel i sannsynlighetsregningen. Denne artikkelen gir to eksempler på bruken: et ressursproblem i strategispillet Warhammer, og absorpsjonstider i en Markovkjede.  
*Tekst: Knut Meen og Tore Langholm*
- 32 Nordlys, og den norske romforskeren Kristian Birkeland  
Birkelandsjubileet ble feiret sist sommer, «Birkelandsstrømmer» er ansvarlige for nordlys, og bildet hans finner vi på den gamle 200-lappen. Hvorfor finner vi navnet i verdensrommet og bildet på pengesedler?  
*Tekst: Linn-Kristine Glesnes Ødegaard*
- 36 «Jeg ville i alle fall ikke dø uten å kjenne svaret.»  
Hun arbeidet med ett og samme problem i en årrekke, uten å vite om hun var på rett spor. Hva er drivkraften bak en slik innsats?  
*Tekst: Ellen Margit Krätzig-Berle*
- 40 Ingeniørfaglig innføring, eit mønsterfag for SKSK?  
Våre ingeniørkadetter arbeider i grupper på tvers av studieretningene. Gruppen må implementere et oppgitt sjømilitært konsept, den må dokumentere sitt arbeid, og den må demonstrere sine produkter i konkurranse med de andre gruppene.  
*Tekst: Lars Olav Tveita*

## Del 2

ARTIKLER BASERT PÅ  
BACHELOROPPGAVER

- 48 Automatisert Rubiks kube  
Artikkelen er et sammendrag av forfatterens bacheloroppgave. De bygget en robot som kunne løse en Rubiks kube. De måtte løse de tekniske problemene med roboten og de måtte implementere en løsningsalgoritme.  
*Tekst: Bjarte Abrahamsen, Espen Dragset og Leif Martin Jensen*
- 55 Måling av fartøys elektriske signatur og miljømessige påvirkninger  
Artikkelen er en redigert versjon av forfatterens bacheloroppgave. Elektrisk signatur er et elektrisk felt alle fartøy genererer i sjøen rundt seg. Dette feltet kan måles, og i teorien skal måledataene kunne brukes til å si noe om hvilket fartøy det er som detekteres.  
*Tekst: Helene Sundby Brennesvik*
- 70 Styrkeberegning av en fremtidig undervannsfarkost  
Artikkelen er et sammendrag av forfatterens bacheloroppgave. Utgangspunktet deres var en eldre nitrogentank. Kunne denne eksisterende trykk-tanken videreutvikles til en undervannsfarkost med et operasjonsområde ned til 400 meter, og samtidig ivareta sikkerheten til personellet?  
*Tekst: Stian Valand og Vegard Bratberg*



# Forord

Dagfinn Andreassen

Hele utdanningssystemet i Forsvaret har i mange måneder brukt svært mye tid og krefter på Utdanningsreformen, snart får vi høre hva Forsvarssjefen mener. Det som virker sikkert, er at han kan ikke mene noe kostbart: de forventede innsparingene er allerede allokert til andre budsjettposter, FHS får sine budsjetter redusert tilsvarende den forventede gevinsten.

Så ordet utdanningsreform er et godt eksempel på nytale<sup>1</sup>, man vil ikke kalle en spade for en spade og bruke det dekkende ordet kostnadsreform. Det som har skjedd, er at departementet (?) har bestemt at det skal kuttes et visst beløp og et visst antall årsverk i utdanningssystemet, og så må de som sitter i prosjektet, gjøre så godt de kan.

Den politiske gevinsten ved å kutte i utdanningen er klar: kostnadsreduksjonen er umiddelbar, mens det tar flere år før regningen kommer. Pussig nok er det akkurat samme gevinst man oppnådde ved å kutte i vedlikeholdet på fartøyene.

Skolen vår har lagt ned mye ressurser i reformarbeidet, det har vært en betydelig slitasje på ressurspersoner. Likevel produserer Sjøkrigsskolen på en måte vi kan være stolte av. Vi gir våre kadetter den utdanningen våre planer tilsier, og vi fortsetter å uteksaminere gode offiserer til Forsvaret.

Mine kolleger i seksjonen fortsetter også å produsere gode artikler. Parhestene Meen og Langholm illustrerer blant annet hvordan matematikken kan brukes til å kvantifisere hvor mye tid man bør legge ned i forberedelser til en konkurranse. Ødegaard sin artikkel tar utgangspunkt i hennes kompetanse innen nordlys og ladede partikler fra solen. Kunnskaper innen dette feltet

er også viktige for Forsvaret, en tilstrekkelig kraftig solstorm vil skape store problemer for kommunikasjonssystemer. Berle illustrerer hvordan vi aldri kan vite om et forskningsarbeid faktisk vil føre frem til resultater.

Artikkelen til Tveita illustrerer hvordan en liten og spesialisert skole kan drive virkelig nybrottsarbeid. Han viser hvordan SKSK har skapt et ingeniørfaglig innføringskurs av meget høy kvalitet, nøye tilpasset det våre kadetter vil møte senere. Artikkelen burde være obligatorisk lesning for de som ivrer for mest mulig utsetting til sivile høyskoler, hvor muligheter for faglig tilpassning blir sterkt redusert.

Våre kadetter legger ned mye arbeid i sine bacheloroppgaver. I dette nummeret har vi med tre artikler basert på oppgaver fra nylig uteksaminerte kadetter, de viser at våre kadetter evner å arbeide med interessante og relevante problemstillinger.

Sjøkrigsskolen skal nå starte arbeidet med å konkretisere den nye utdanningen. Den blir helt sikkert organisert annerledes enn nå, med nye undervisningsformer og ny teknologi. Det er ikke noe galt i ny organisering, nye undervisningsformer, ny teknologi; endringer og nyskaping er en del av vår hverdag.

Men nå skal vi hovedsakelig ta inn kadetter rett fra videregående skole, med de konsekvenser det har for militærfaglig bakgrunn. Så skal vi bruke mindre tid på å utdanne dem, og når de er ferdige, er kravet fremdeles at de skal gå rett ut i tjenesten og gjøre jobben.

Jeg slutter med å feilsitere Donald Duck: «Jeg vet vi er gode, men er vi virkelig så gode?»

---

<sup>1</sup> *Nytale refererer til den norske oversettelsen av det engelske begrepet newspeak. Begrepet ble introdusert i George Orwells dystopiske roman 1984, som ble utgitt i 1949.*[1] *Generelt har nytale fått betydningen et hvert forsøk på å begrense mislikt språk av en regjering eller annen mektig enhet.*[2] (Kilde: Wikipedia)



---

Ansatte ved seksjon  
maritim militær teknologi

---

# Ansatte ved seksjon maritim militær teknologi

---



Kapteinløytnant  
Nina Karin Mo Wahlund  
  
Seksjonsleder Seksjon for  
Maritim Militær Teknologi  
ninakarim.wahlund@sksk.mil.no

Har vært lærer i skipstekniske fag ved Sjøkrigsskolen siden 2008. Utdannet ved Sjøkrigsskolen (1998-2001) og NTNU Marin Teknikk (2005-2008). Tjenesteerfaring fra fregatt. Underviser med hovedvekt i tekniske spesialiseringsemner for kadetter med fordypning i maskinfag ved Sjøkrigsskolen. Tok over som Seksjonsleder for FHS/SKSK/UVAVD/MARTEK fra høst 2017.

---



Førstelektor  
Ellen Margit Krätzig-Berle  
  
Matematikk  
ellen.berle@sksk.mil.no

60 år, har arbeidet som høgscolektor i matematikk på SKSK siden 1984, var leder for teknologi-avdelingen fra 2011 til 2017. Utdannet som «Diplom-Mathematiker» ved universitetet i Mainz (Tyskland).

---



Dosent  
Dagfinn Andreassen  
  
Data/matematikk  
dagfinn.andreassen@sksk.mil.no

Jeg ble cand. mag. ved universitetet i Oslo i 1969. I perioden 1971-1973 var jeg vitenskapelig assistent ved Norges Tekniske Høgskole, Trondheim, samtidig som jeg fullførte min cand. real. (1972, formelt ved Lærerhøgskolen i Trondheim). 1973-1976 var jeg doktorgradstudent ved universitetet i Dundee, Skottland, så derfra har jeg min Ph.D i matematikk. Deretter var jeg 1 år vikar som førsteamanuensis ved NTH, og så var jeg konsulent og førstekonsulent i Statens Rasjonaliseringsdirektorat, Oslo. Begynte som dosent ved Sjøkrigsskolen i november 1980. Nå underviser jeg i datakommunikasjon og operativsystemer for teknisk bransje, og matematikk for OM.

---



Førstelektor  
Knut Meen  
  
Matematikk  
knut.meen@sksk.mil.no

Førstelektor i matematikk ved Avdeling for teknologi siden 2000. 63 år. Cand.real fra Universitetet i Bergen, 1978. Pedagogisk seminar 1981. Sivil verneplikt 1978 – 1979. Tidligere arbeidsplasser: Matematisk Institutt, Universitetet i Bergen, 1979 – 1986. Seksjon for Medisinsk Statistikk og Informatikk, Universitetet i Bergen, 1986. FFV Aune, 1987. Askøy videregående skole, 1987 – 2000. Timelærer ved BI – Bergen og UiB, i perioden 1988 – 2005.

---



Professor  
Tore Langholm  
  
Matematikk  
tore.langholm@sksk.mil.no

Underviser i matematikk. Har hovedfag i matematikk fra Universitetet i Oslo 1983 og doktorgrad fra Stanford University 1987. Har tidligere vært ansatt som forsker ved Universitetet i Oslo, førsteamanuensis ved Universitetet i Bergen, og professor ved Universitetet i Oslo.

---





Førsteamanuensis  
Christophe Massacand

Fysikk og matematikk  
cmassacand@sksk.mil.no

Diplom i teoretisk fysikk ved ETH Zürich, Sveits (1989). Doktorgrad i fysikk ved ETH Zürich (1993). Postdoktor i astrofysikk ved Universitetet i Tromsø (1994-1996). Har siden 1997 jobbet i seismisk industri, først som prosjektleder i geofysikkgruppen om bord på seismikkfartøy, senere på land som leder med ansvar for kvalitetskontroll av seismiske data og for FoU-prosjekter knyttet til geofysisk programvare. Ansatt ved Sjøkrigsskolen siden 2008, underviser i emner innen generell fysikk, elektromagnetisme, ballistikk, sensorteori, datanettverk og matematikk.



Førsteamanuensis  
Harald Totland

Fysikk og matematikk  
harald.totland@sksk.mil.no

Diplom i fysikk (Diplom-Physiker) ved Universität Freiburg, Tyskland (1994). Doktorgrad i fysikk (dr. scient.) ved Universitetet i Oslo (1999). Tidligere ansatt som førsteamanuensis ved Høgskolen i Bergen, Avdeling for lærerutdanning, Seksjon for matematikk fagdidaktikk (1999-2000). Ansatt ved Sjøkrigsskolen siden 2000, underviser i emner innen generell fysikk, statikk og fasthetslære, fluidmekanikk, elektromagnetisme, sensorteori, ballistikk og matematikk.



Førsteamanuensis  
Lars Olav Tveita

Fysikk/EDB  
lars.olav.tveita@sksk.mil.no

Cand real og lektor i fysikk fra Universitetet i Bergen (1971). Har jobba som stipendiat ved Fysisk Institutt, UIB, som høgskolelektor ved Stord Lærarhøgskole og som lektor ved Bergen katedralskole. Underviser i fysikk og dateknologi på Sjøkrigsskolen.



Høgskolelektor  
Arild Sæbø

Elektrofag  
arild.saebo@sksk.mil.no

Høgskolelektor innen elkraft og skipslektriske anlegg. Hovedoppgave innen undervisning og bestyrer for skolens elkraft- og høyspenningslaboratorier. Utdannet Sivilingeniør innen elkraft ved NTNU. Tjenesteerfaring som elektrooffiser i UVB-våpenet, teknisk saksbehandler elektro i FLO og disiplinleder elektro fregattprosjektet.



Høgskolelektor  
Terje Fykse

Elektrofag  
terje.fykse@sksk.mil.no

Utdannet sivilingeniør i elektro/automatisering. Ansatt som høgskolelektor ved Sjøkrigsskolen siden 1991, hvor jeg underviser i emner innen elektroteknikk, regulerings-teknikk, instrumentering og styringsteknikk. Har jobbet som prosjektingeniør i Siemens før jeg begynte på Sjøkrigsskolen og i en periode jeg hadde permisjon herfra. Oppgaver i Siemens var innen automatisering for offshore, skip og prosessindustri. Jeg hadde bl.a. ansvaret for styring og overvåking av skipstekniske systemer på Ula-klassen ubåter.

---



Førsteamanuensis  
Alexander Sauter

Elektrofag/automasjon  
asauter@sksk.mil.no

Ansatt ved Sjøkrigsskolen siden 2016. Brei tverrfaglig utdanning innen realfag med master (Diplom) i fysikk fra Universitetet i Heidelberg, Tyskland, og PhD fra Universitetet i Bergen. Har undervist i elektroteknikk, sensorteori, automatiserte systemer og ingeniørfaglig systemtenkning. Bestyrer for automasjonslaboratoriet.



Høgskolelektor  
Gisle Strand

Skipsteknikk  
gisle.strand@sksk.mil.no

Høgskolelektor innen maskin – og skipstekniske fag. Hovedoppgave innen undervisning og bestyrer for skolens maskintekniske laboratorier. Utdannet Marineingeniør ved Sjøkrigsskolens maskinlinje og Sivilingeniør innen hydrodynamikk og konstruksjon ved NTNU. Etterutdanning innen marinefartøyers konstruksjon og overlevelsesevne ved MIT/US Navy. Tjeneste som maskinoffiser i MTB- og Fregattvåpenet og som marineingeniør ved skrogkontoret til Sjøforsvarets Forsyningskommando (SFK).



Avdelingsingeniør/laborant  
Frode Wikne

Laboratoriumstekniker  
fwikne@sksk.mil.no

Jobber med det meste innen laboratoriene. Fagbrev som kjølemontør (2000), Utdanning maskiningeniør fra HiB (2004-2007). Jobbet med kjemi, prosess og mekanisk samt 3D modellering (ProEngineer) i Weyland AS (2007-2013), Jobbet med prosessanlegg og 3D modellering (SolidWorks) i AMOF Fjell Prosess Technology AS (2014-2015).



Førsteamanuensis  
Linn-Kristine Glesnes Ødegaard

Fysikk  
lodegard@sksk.mil.no

Tilsett ved Sjøkrigsskolen juni 2017 for å undervise fysikk. Tok doktorgrad i romfysikk ved Universitetet i Bergen (2016), der eg var ein del av forskingsmiljøet som undersøker atmosfæriske effektar forårsaka av partikkelnedbør frå sola. Før det tok eg integrert lektorutdanning med mastergrad i romfysikk, også ved UiB (2013). Etter utdanninga underviste eg eitt år matematikk og fysikk ved ingeniørutdanninga på Høgskolen i Bergen/Høgskulen på Vestlandet.

---





---

# DEL 1

Artikler fra staben

---

---

# Sannsynlighetsgenererende funksjoner i praktisk sannsynlighetsregning

Tekst: Knut Meen og Tore Langholm

---

# Sannsynlighetsgenererende funksjoner i praktisk sannsynlighetsregning

Knut Meen og Tore Langholm  
Sjøkrigsskolen

---

Ingeniørkadettene på Sjøkrigsskolen får i løpet av studiet 30 studiepoeng i matematikk. Dette inkluderer grunnleggende sannsynlighetsregning og statistikk.

I sannsynlighetsregningen tar vi for oss stokastiske variabler, med forventning og varians. Konvolusjon blir behandlet, både for diskrete og kontinuerlige variabler, men uten bruk av genererende funksjoner. Det kunne for så vidt vært tatt med. Både Laplace- og Fouriertransformasjonen er med i matematikkursene, og kadettene på Elektronikk og datalinjen møter transferfunksjoner i et kurs i signalbehandling.

Sannsynlighetsregningen omhandler også Markovkjeder, men kun med endelig tilstandsrom. I den forbindelse utnyttes teorien fra matrisealgebraen, som undervises separat – som en del av den ordinære matematikken.

Videre er potensrekker, og Maclaurinrekker spesielt, grundig behandlet i det tredje matematikkurset ved Sjøkrigsskolen.

Denne artikkelen handler om sannsynlighetsgenererende funksjoner, som er et nyttig hjelpemiddel i sannsynlighetsregningen, både teoretisk og praktisk. Vi skal

illustrere de sannsynlighetsgenererende funksjoners fantastiske slagkraft med to eksempler.

Det første eksemplet er et konkret problem med utgangspunkt i strategispillet Warhammer.

Det andre eksemplet handler om absorpsjonstider, dvs. tider ( $T_k$ ) det tar fra en Markovkjede, som starter i en transient tilstand  $k$ , går inn i en rekurrent klasse. Kadettene våre er kjent med *forventede* absorpsjonstider, regnet ut fra et sett med ligninger basert på en såkalt «første-steps-analyse». De skal også, i prinsippet, være i stand til å finne sannsynlighetsfordelingen til  $T_k$  ved hjelp av egenverdier og egenvektorer til ettskritt overgangsmatrisen. I denne artikkelen er det sannsynlighetsgenererende funksjoner som er veien til det samme målet.

Det blir ikke utviklet noe ny teori i denne artikkelen. Målgruppen er studenter med omtrent samme bakgrunn som våre kadetter. At artikkelen kan gi slike en ny innsikt, vil vi ikke se helt bort i fra.

Forfatterne vil takke to anonyme referenter og redaktøren av *Necesses* for en rekke gode kommentarer.

---

## 1 SANNSYNLIGHETSGENERERENDE FUNKSJONER

---

Hvis  $X$  er en diskret stokastisk variabel med utfallsrom som er en *delmengde* av  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ , kan vi alltid utvide utfallsrommet til hele  $\Omega$ . Det gjør vi ved å sette punktsannsynlighetene til de verdiene i  $\Omega$  som ikke er med i det opprinnelige utfallsrommet lik 0. Da har  $X$  utfallsrom  $\Omega$  og punktsannsynlighetene:  $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ .

Den sannsynlighetsgenererende funksjonen  $G(u)$  til  $X$  er nå definert ved potensrekken:

$$(1) \quad G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n.$$

Rekken konvergerer for  $|u| \leq 1$  og videre er  $G(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ .

Et velkjent resultat i sannsynlighetsregningen er: Hvis  $X$  er en stokastisk variabel og  $Y = g(X)$  er en funksjon av  $X$ , er forventningen til  $Y$  gitt som:

$$\mathbf{E}[Y] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n g(n).$$

Det vil si:

$$(2) \quad G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n u^n = \mathbf{E}[u^X].$$

Ofte er det slik at en stokastisk variabels sannsynlighetsfordeling ikke er direkte gitt, men at variabelen er knyttet opp til andre stokastiske variabler, gjennom gitte funksjoner. Da er det gjerne – som så ofte ellers i matematikken – slik at det å gå en omvei fører fram til målet. Og

omveien her, i denne artikkelen, heter den (sannsynlighets) genererende funksjonen. La oss nå forutsette at det er den genererende funksjonen til  $X$ ,  $G(u)$ , som er kjent, og ikke sannsynlighetsfordelingen til  $X$ .

Da er forventningen og variansen til  $X$  lett å bestemme, ved derivasjoner av  $G(u)$ :

$$(3) \quad G'(u) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n u^{n-1} \Rightarrow G'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n = \mathbf{E}[X]$$

$$G''(u) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \cdot p_n u^{n-2} \Rightarrow G''(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) p_n =$$

$$= \mathbf{E}[X \cdot (X - 1)] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X].$$

Dette gir:

$$(4) \quad \mathbf{Var}[X] = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2.$$

Men dette er ikke det hele. Man kan også bestemme punktsannsynlighetene til  $X$  fra  $G(u)$  hvis man klarer å bestemme dens Maclaurinrekke. Punktsannsynlighetene er jo gitt som koeffisientene i rekkeutviklingen av  $G(u)$  omkring  $u_0 = 0$ . Det ser vi av (1).

Hvis  $X_1$  og  $X_2$  er to uavhengige stokastiske variabler på  $\Omega$ , og  $G_1(u)$  og  $G_2(u)$  er disse variablenes genererende funksjoner, så er  $S = X_1 + X_2$  også en stokastisk variabel på  $\Omega$ . Den genererende funksjonen til  $S$  er gitt som produktet av de genererende funksjonene til  $X_1$  og  $X_2$ .

$$(5) \quad G_S(u) = G_1(u) \cdot G_2(u).$$

Dette generaliseres til en sum av  $n$ , et vilkårlig antall, uavhengige stokastiske variabler. (Disse resultatene, med bevis, finner man i Nissen-Meyer [1970].<sup>1</sup>)

### Eksempel

Hvis  $X$  er binomisk fordelt, med parametere  $m \geq 1$  og  $p \in [0, 1]$ , er punktsannsynlighetene gitt som:

$$p_n = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} p^n \cdot (1-p)^{m-n}, \text{ for } n = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Ved binomialformelen finner vi den genererende funksjonen.

$$G(u) = \sum_{n=0}^m \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} p^n \cdot (1-p)^{m-n} \cdot u^n = \sum_{n=0}^m \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!} (p \cdot u)^n \cdot (1-p)^{m-n} = (p \cdot u + 1 - p)^m$$

Denne funksjonen er lett å derivere, både én og to ganger.

$$G'(u) = m \cdot (p \cdot u + (1-p))^{m-1} \cdot p \Rightarrow \mathbf{E}[X] = G'(1) = m \cdot (p + (1-p))^{m-1} \cdot p = m \cdot p$$

$$G''(u) = m \cdot (m-1) \cdot (p \cdot u + (1-p))^{m-2} \cdot p^2 \Rightarrow \mathbf{E}[X(X-1)] = G''(1) = m \cdot (m-1) \cdot p^2$$

Hvis  $X_1$  og  $X_2$  er uavhengige binomisk fordelt,  $X_1 \sim B(m_1, p)$  og  $X_2 \sim B(m_2, p)$ , altså med samme «suksessparameter»  $p$ , er  $S = X_1 + X_2$  også binomisk fordelt, med parametere  $m_1 + m_2$  og  $p$ . Det følger av (5):

$$G_S(u) = (p \cdot u + 1 - p)^{m_1} \cdot (p \cdot u + 1 - p)^{m_2} = (p \cdot u + 1 - p)^{m_1 + m_2}.$$

<sup>1</sup> Se også [https://en.wikipedia.org/wiki/Probability-generating\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Probability-generating_function)



## 2 KENNETHS PROBLEM

---

Kenneth skal delta på et stevne i London med sin store hobby, som er strategispill med miniatyrer i en fiksjonsverden (Warhammer). På disse stevnene spiller deltagerne mot hverandre etter bestemte regler. Miniatyrene må deltagerne selv ha produsert på forhånd, og det er et nitid arbeid, som tar utrolig mye tid. Kenneth har jo ikke lyst til å legge ned mer arbeid enn nødvendig i antall miniatyrer, og her er poenget:

Spilleomgangene starter med at hver deltager kaster et sett med tre vanlige terninger. Disse fortsetter han å kaste så lenge terningene viser forskjellige resultat. For hvert kast summerer han øynene og kan legge til nye soldater til hæren sin. For eksempel  $1 + 3 + 5 = 8$  øyne gir 8 nye soldater. Så lenge terningene viser ulikt, kan han fortsette å kaste og legge til nye soldater for hver gang, helt til to av terningene viser like øyne; for eksempel  $4 + 4 + 1$ . Da får han ikke kaste mer, men kan legge de siste 9 til hæren sin.

Spørsmålet er: Hvor mange figurer bør Kenneth ha produsert og tatt med til London?

Spørsmålet er ikke helt presist stilt, men vi skal se om vi likevel kan gi et tilfredsstillende svar på dette, og mer til.

### Antall kastomganger

Sannsynligheten for at alle tre terningene viser ulikt resultat er lik  $\frac{5}{9}$ , fordi: Første terning som treffer bordet kan vise hva som helst, men så må andre terning vise et annet utfall, som skjer med sannsynlighet lik  $\frac{5}{6}$ . Den siste må vise et resultat som er forskjellig fra de to første, og det skjer med sannsynlighet  $\frac{4}{6}$ . Sannsynligheten for at alle tre viser forskjellig er  $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{5}{9}$ . Sannsynligheten for at minst to terninger viser samme resultat er  $\frac{4}{9}$ .

La  $N$  være antall ganger Kenneth får kaste terningene.  $N = 1$  med sannsynlighet  $\frac{4}{9}$  (minst to terninger viser samme resultat i første forsøk).  $N = 2$  med sannsynlighet  $\frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9}$  (første forsøk gir ulike resultat og neste kast gir minst to like resultat). Så er det bare å fortsette.

$$P(N = n) = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}, \text{ for } n = 1, 2, 3, \dots$$

Den genererende funksjonen til  $N$  blir nå en uendelig geometrisk rekke, som lar seg summere.

$$G_N(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} \cdot u^n = \frac{4}{9} u \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{9} \cdot u\right)^n = \frac{4}{9} u \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{9} u\right)} = \frac{4u}{9 - 5u}.$$

### Antall soldater

La nå  $X_1, X_2, \dots, X_N$  være de resultater som Kenneth oppnår i gjentatte kastomganger. Antall soldater som Kenneth får plassere ut, kaller vi  $S$ . Da er  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ , en sum av *et stokastisk antall* ( $N$ ) uavhengige variabler, hvor de  $N - 1$  første er identisk fordelt (alle har resultert i ulike terningkast) men den siste,  $X_N$ , har en annen sannsynlighetsfordeling.

### Sannsynlighetsfordelingene til $X_1, X_2, \dots, X_N$

De  $N - 1$  første variablene har en sannsynlighetsfordeling som bestemmes fra fordelingen for summen av tre terninger, hvor en betinger med hensyn på at alle tre terningene viser ulike resultat.

Det er i alt 120 mulige utfall hvor de tre terningene viser ulike resultat, og disse 120 resultatene er alle like sannsynlige.

Det er ikke mulig å oppnå verken 3, 4, 5, 16, 17 eller 18 når de tre terningene viser ulike resultat mens det er 6 ulike måter å oppnå sum lik 6, nemlig de 6 permutasjonene av 1, 2 og 3. Videre er det også 6 mulige måter for å få 7, 14 og 15, det er 12 mulige måter for å få 8 og 13 og det er 18 mulige måter for å få 9, 10, 11 og 12 på.

Punktsannsynlighetene for  $X_k$ , for  $k = 1, 2, \dots, N - 1, (p_x)$ , blir nå som gitt i tabell 1.

$p_x = P(X_k = x   N), k < N.$																
$x$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$p_x$	0	0	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0	0	0

Tabell 1 – Sannsynlighetsfordelingen for sum av tre terninger gitt alle viser ulikt resultat.

Fordelingen til  $X_N (q_x)$  bestemmes ved at de 120 utfallene hvor alle terningene viser ulikt *luker vekke*, og de 96 resterende utfallene betraktes som like sannsynlige. Fordelingen blir som vist i tabell 2.

$q_x = P(X_N = x)$																
$x$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$q_x$	$\frac{1}{96}$	$\frac{3}{96}$	$\frac{6}{96}$	$\frac{4}{96}$	$\frac{9}{96}$	$\frac{9}{96}$	$\frac{7}{96}$	$\frac{9}{96}$	$\frac{9}{96}$	$\frac{7}{96}$	$\frac{9}{96}$	$\frac{9}{96}$	$\frac{4}{96}$	$\frac{6}{96}$	$\frac{3}{96}$	$\frac{1}{96}$

Tabell 2 – Sannsynlighetsfordelingen for sum av tre terninger, gitt minst to viser samme resultat.

De sannsynlighetsgenererende funksjoner til  $\{p_x, x = 0, 1, \dots, 18\}$  og  $\{q_x, x = 0, 1, \dots, 18\}$  vil vi kalle  $G_1(u)$  og  $G_2(u)$ :

$$G_1(u) = \frac{1}{20}(u^6 + u^7 + 2u^8 + 3u^9 + 3u^{10} + 3u^{11} + 3u^{12} + 2u^{13} + u^{14} + u^{15})$$

$$G_2(u) = \frac{1}{96}(u^3 + 3u^4 + 6u^5 + 4u^6 + 9u^7 + 9u^8 + 7u^9 + 9u^{10} + 9u^{11} + 7u^{12} + 9u^{13} + 9u^{14} + 4u^{15} + 6u^{16} + 3u^{17} + u^{18}).$$

### Sannsynlighetsfordelingen for S, antall soldater

Den sannsynlighetsgenererende funksjonen  $G_S(u)$  til S, når S er summen av et stokastisk antall uavhengige ledd, kan vi finne fra setningen om dobbelt forventning:

$$\begin{aligned} G_S(u) &= \mathbf{E}[u^S] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[u^S | N]] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[u^{X_1+X_2+\dots+X_{N-1}+X_N} | N]] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[u^{X_1} \cdot u^{X_2} \cdot \dots \cdot u^{X_{N-1}} \cdot u^{X_N} | N]] = \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[u^{X_1} | N] \cdot \mathbf{E}[u^{X_2} | N] \cdot \dots \cdot \mathbf{E}[u^{X_{N-1}} | N] \cdot \mathbf{E}[u^{X_N} | N]]] = \\ &= \mathbf{E}[G_1(u)^{N-1} \cdot G_2(u)] = \mathbf{E}[(G_1(u))^N] \cdot \frac{G_2(u)}{G_1(u)} = G_N(G_1(u)) \cdot \frac{G_2(u)}{G_1(u)} = \frac{4G_2(u)}{9 - 5G_1(u)}. \end{aligned}$$

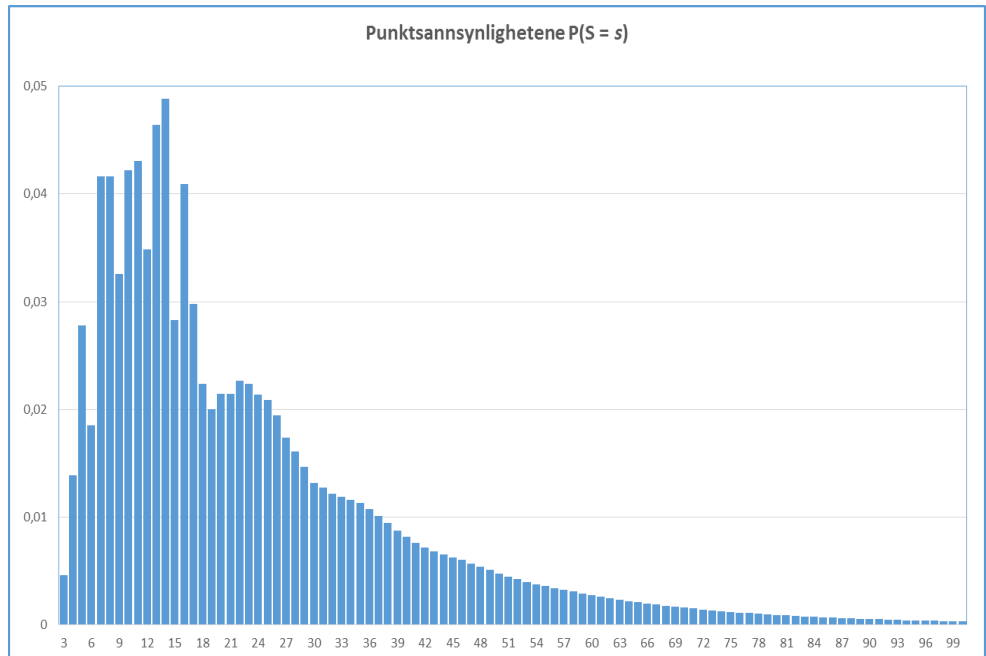
Her er  $G_1(u)$  og  $G_2(u)$  polynomene over, som er henholdsvis av 15. og 18. grad.

Mathematica kan finne Maclaurinrekken til  $G_S(u)$  opp til og med grad lik 100, for eksempel, og dermed har man punktsannsynlighetene til S med et stort antall siffrer nøyaktighet.<sup>2</sup> Disse er gitt i tabell 3 på neste side, og vist som et histogram i figuren under.

<sup>2</sup> Takk til førsteamanuensis Harald Totland, ved Sjøkrigsskolen, som er eksperten vår på Mathematica.

s	P(S = s)	s	P(S = s)	s	P(S = s)	s	P(S = s)	s	P(S = s)
1	0	21	0.02143000	41	0.00760876	61	0.00259314	81	0.00085779
2	0	22	0.02263791	42	0.00716538	62	0.00244534	82	0.00081171
3	0.004629630	23	0.02237535	43	0.00682674	63	0.00230730	83	0.00076783
4	0.013888889	24	0.02139408	44	0.00653385	64	0.00217996	84	0.00072617
5	0.027777778	25	0.02084465	45	0.00625526	65	0.00206286	85	0.00068676
6	0.018518519	26	0.01946070	46	0.00599020	66	0.00195463	86	0.00064959
7	0.041666667	27	0.01739009	47	0.00569924	67	0.00185356	87	0.00061458
8	0.041666667	28	0.01605964	48	0.00539212	68	0.00175778	88	0.00058161
9	0.032536008	29	0.01466088	49	0.00507825	69	0.00166601	89	0.00055053
10	0.042181070	30	0.01315847	50	0.00476829	70	0.00157758	90	0.00052115
11	0.043081276	31	0.01275292	51	0.00447451	71	0.00149236	91	0.00049333
12	0.034850823	32	0.01219499	52	0.00420956	72	0.00141066	92	0.00046693
13	0.046424897	33	0.01187223	53	0.00397335	73	0.00133300	93	0.00044187
14	0.048868313	34	0.01162411	54	0.00376404	74	0.00125973	94	0.00041809
15	0.028295753	35	0.01127510	55	0.00357672	75	0.00119104	95	0.00039555
16	0.040912923	36	0.01072294	56	0.00340261	76	0.00112681	96	0.00037420
17	0.029767518	37	0.01011944	57	0.00323527	77	0.00106669	97	0.00035403
18	0.022394404	38	0.00942882	58	0.00307142	78	0.00101020	98	0.00033497
19	0.020008145	39	0.00873723	59	0.00290875	79	0.00095681	99	0.00031698
20	0.021472765	40	0.00813521	60	0.00274833	80	0.00090611	100	0.00029998

Tabell 3 – Punktsannsynligheter for antall miniatyrer (S) Kenneth trenger å ta med seg i krigen.

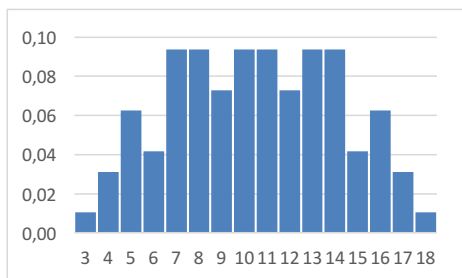


Figur 1 – Histogram for punktsannsynlighetene til S.

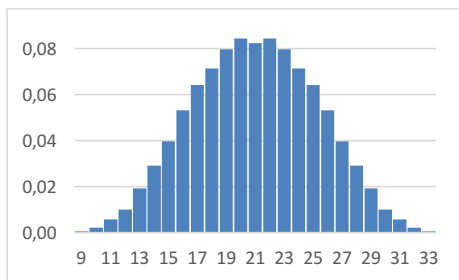
Sannsynlighetene har noen hakkede variasjoner for små verdier av  $n$ , som skyldes  $q_x$ . Sannsynlighetsfordelingen til  $S$  kan jo også uttrykkes ved setningen om total sannsynlighet:

$$(6) \quad P(S = x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S = x | N = n) \cdot P(N = n), \text{ for } x = 3, 4, \dots$$

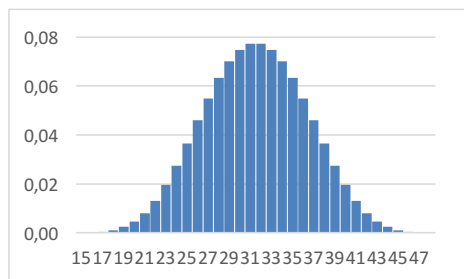
Fordelingen for  $(S | N = n)$  finner vi ved å folde  $\{p_x\}$  med seg selv  $n - 1$  ganger, og så én gang med  $\{q_x\}$ . Fordelingen for  $(S | N = 1)$  er  $\{q_x\}$ , og så får  $\{q_x\}$  mindre og mindre betydning for  $N = 2, 3, \dots$ . Figurene 2 – 5, som er vist nedenfor, viser de betingede fordelingene for  $S$  gitt  $N = 1, 2, 3$  og 4. (Disse fordelingene tar en symbolsk lommeregner seg av.)



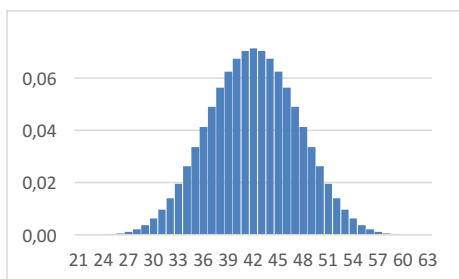
Figur 2 – Punktsannsynlighetene til  $(S | N = 1)$ .



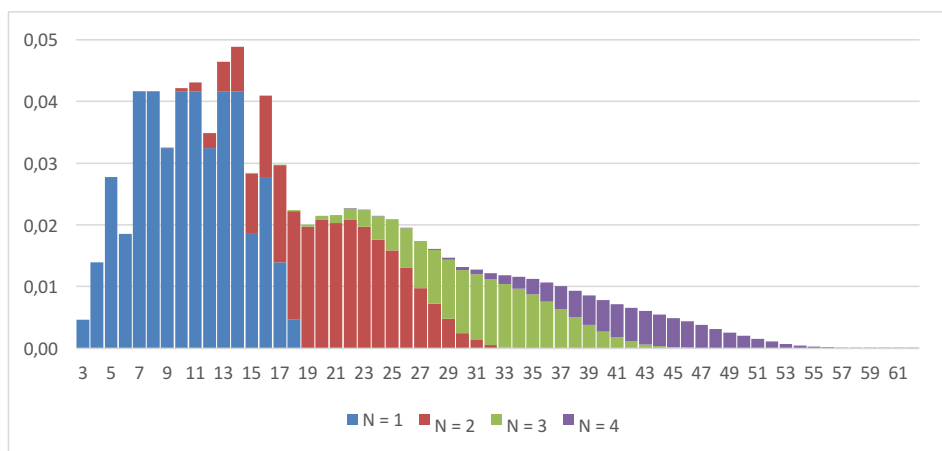
Figur 3 – Punktsannsynlighetene til  $(S | N = 2)$ .



Figur 4 – Punktsannsynlighetene til  $(S | N = 3)$ .



Figur 5 – Punktsannsynlighetene til  $(S | N = 4)$ .



Figur 6 – Punktsannsynlighetene til  $S$  brutt opp etter bidrag for ulike verdier av  $N$

Figur 6 viser hvordan  $P(S = x)$ , gitt ved ligning (6), er bygget opp av bidrag fra de betingete fordelingene, for  $3 \leq x \leq 26$ . For  $x \geq 27$  så vil også  $N = 5$  komme inn med sitt bidrag, for  $x \geq 33$  kommer  $N = 6$  med, og så videre.  $N = n$  gir bidrag til  $P(S = x)$  for  $6n - 3 \leq x \leq 3 + 15n$ .

De kumulative sannsynlighetene,  $P(S \leq n)$ , er lik summen av punktsannsynlighetene fra og med 3 og til og med  $n$ . (tabell 4).

$n$	$P(S \leq n)$	$n$	$P(S \leq n)$	$n$	$P(S \leq n)$	$n$	$P(S \leq n)$	$n$	$P(S \leq n)$
1	0	21	0.58037	41	0.86283	61	0.95449	81	0.98491
2	0	22	0.60301	42	0.86999	62	0.95694	82	0.98572
3	0.00463	23	0.62539	43	0.87682	63	0.95925	83	0.98649
4	0.01852	24	0.64678	44	0.88335	64	0.96143	84	0.98721
5	0.04630	25	0.66762	45	0.88961	65	0.96349	85	0.98790
6	0.06482	26	0.68709	46	0.89560	66	0.96544	86	0.98855
7	0.10648	27	0.70448	47	0.90130	67	0.96730	87	0.98917
8	0.14815	28	0.72053	48	0.90669	68	0.96905	88	0.98975
9	0.18068	29	0.73520	49	0.91177	69	0.97072	89	0.99030
10	0.22287	30	0.74835	50	0.91654	70	0.97230	90	0.99082
11	0.26595	31	0.76111	51	0.92101	71	0.97379	91	0.99131
12	0.30080	32	0.77330	52	0.92522	72	0.97520	92	0.99178
13	0.34722	33	0.78517	53	0.92919	73	0.97653	93	0.99222
14	0.39609	34	0.79680	54	0.93296	74	0.97779	94	0.99264
15	0.42439	35	0.80807	55	0.93653	75	0.97898	95	0.99303
16	0.46530	36	0.81880	56	0.93994	76	0.98011	96	0.99341
17	0.49507	37	0.82892	57	0.94317	77	0.98118	97	0.99376
18	0.51746	38	0.83834	58	0.94624	78	0.98219	98	0.99410
19	0.53747	39	0.84708	59	0.94915	79	0.98315	99	0.99442
20	0.55894	40	0.85522	60	0.95190	80	0.98405	100	0.99472

Tabell 4 – Kumulative sannsynligheter for S.

Når  $P(S \leq 47) = 0.90130$  betyr det at det er vel 90 % sjanse for at det vil være tilstrekkelig å ta med seg 47 miniatyrer. Om for eksempel Kenneth skal delta i fem spilleomganger, så er sannsynligheten for at de 47 miniatyrene vil være tilstrekkelig for alle omgangene lik  $0.90130^5 = 0.59476$ , eller bare knappe 60 %.

Eller mer generelt, for å være minst  $\alpha \cdot 100$  % sikker på at antall miniatyrer,  $n$ , skal være tilstrekkelig i K spilleomganger, så må:

$$P(S \leq n)^K \geq \alpha \Rightarrow P(S \leq n) \geq \sqrt[K]{\alpha}$$

For å være 90 % sikker på at antall miniatyrer vil være tilstrekkelig gjennom fem omganger, må  $P(S \leq n) \geq \sqrt[5]{0.90} = 0.97915$ . Det er oppfylt for  $n \geq 76$ . Med  $K = 10$  er det tilstrekkelig med 88 miniatyrer.

### 3 ABSORBSJONSTIDER I DISKRETE MARKOVKJEDER

#### Innledning og et eksempel

En Markovkjede er en sekvens med stokastiske variabler  $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ , som også gjerne kalles en *stokastisk prosess*. Det er vanlig å si at  $X_n$  er Markovkjedens *tilstand* på tidspunkt  $n$ . De mulige tilstandene kaller vi  $\Omega$ . Vi skal kun betrakte et endelig antall tilstander, og i første omgang er  $\Omega = \{1, 2, \dots, M\}$ .  $\Omega$  kalles *tilstandsrommet*. Videre krav til en Markovkjede er at sannsynlighetsfordelingen for  $X_n$  avhenger kun av hvilken tilstand prosessen er i ved tidspunkt  $n - 1$ , og *ikke* av hvilke tilstander den har vært i før dette.

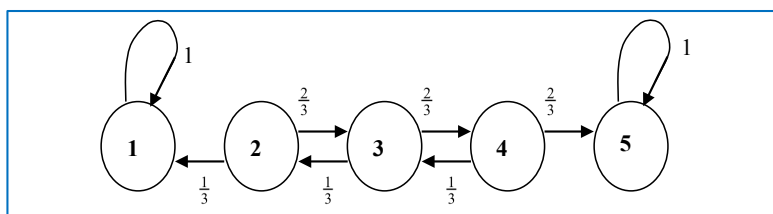
Vi snakker om ettskrittets overgangssannsynlighetene som samles i en *overgangsmatrise*  $\mathbf{P} = (P_{m,k})$ , hvor kolonne  $k$  gir overgangssannsynlighetene *fra* tilstand  $k$ :

$$P_{m,k} = P(X_{n+1} = m \mid X_n = k), \text{ for } k, m \in \Omega.$$

Når disse sannsynlighetene er uavhengige av  $n$ , som er antatt her, sier vi at Markovkjeden er *tidshomogen*.

#### Eksempel

En tidshomogen Markovkjede på  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  har overgangsstruktur som vist i figur 5.



Figur 5 – Overgangsstruktur for en tilfeldig gang med absorberende ender.

Pilene viser hvor prosessen kan gå fra og til, og tallene er sannsynligheter. Tilstandene 1 og 5 er slik at når prosessen først har havnet i en av disse så vil den med sikkerhet vende tilbake. De er *rekurrente*. De øvrige tilstandene er *transiente*. Det er en positiv sannsynlighet for aldri å vende tilbake, når prosessen er i en av disse.

Dette er et eksempel på en såkalt *tilfeldig gang*, med *absorberende ender*.

Ettskrittets overgangsmatrisen er:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

#### En vilkårlig Markovkjede på et endelig tilstandsrom

vil alltid inneholde rekurrente tilstander og muligens transiente tilstander. (Ross [2000], s. 172) Prosessen kan inneholde flere rekurrente *klasser*, hvor noen kan bestå av kun én tilstand – som vi altså kaller absorberende. Hvordan prosessen er inndelt i klasser, vil imidlertid være irrelevant for oss i denne sammenheng. Det som er nødvendig for oss, er at prosessen har *minst* én transient tilstand.

La  $\mathbf{A}$  og  $\Omega \setminus \mathbf{A}$  være mengdene av alle rekurrente og alle transiente tilstander, henholdsvis. I eksemplet er  $\mathbf{A} = \{1, 5\}$  og  $\Omega \setminus \mathbf{A} = \{2, 3, 4\}$ .

La  $T_k$  være antall overganger prosessen bruker fra tilstand  $k$  og til den blir fanget (absorbert) i en rekurrent klasse. Vi skal finne formler for de sannsynlighetsgenererende funksjoner til disse variablene, og formler som vil gi deres forventningsverdier og varianser.

### De sannsynlighetsgenererende funksjoner for $T_1, T_2, \dots, T_M$

Den sannsynlighetsgenererende funksjon for  $T_k$  er gitt fra (1) og (2) som:

$$G_k(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_k = n) \cdot u^n = \mathbf{E}(u^{T_k}), \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

For  $k \in \mathbf{A}$  er  $P(T_k = 0) = 1$  og  $G_k(u) = 1$ .

For  $k \in \Omega \setminus \mathbf{A}$  gir en «første-steps-analyse», dvs. setningen om dobbelt forventning:

$$\begin{aligned} G_k(u) = \mathbf{E}[u^{T_k}] &= \sum_{m=1}^M \mathbf{E}[u^{T_k} | X_1 = m] \cdot P(X_1 = m | X_0 = k) = \sum_{m=1}^M \mathbf{E}[u^{T_m+1}] \cdot P(X_1 = m | X_0 = k) = \\ &= u \cdot \sum_{m=1}^M \mathbf{E}[u^{T_m}] \cdot P(X_1 = m | X_0 = k) = u \cdot \sum_{m=1}^M G_m(u) \cdot P_{m,k}. \end{aligned}$$

La  $\mathbf{Q} = (Q_{m,k})$  være matrisen som framkommer fra  $\mathbf{P}$  ved å erstatte alle overgangssannsynligheter mellom rekurrente tilstander med 0-er. Dette endrer ikke noen elementer i en «transient» kolonne, men alle elementene i rekurrente kolonner blir lik 0. (Overgangssannsynligheter fra rekurrente tilstander til transiente tilstander er jo lik null fra før.)

For  $k \in \Omega \setminus \mathbf{A}$  er  $Q_{m,k} = P_{m,k}$ , slik at:  $G_k(u) - u \cdot \sum_{m=1}^M G_m(u) \cdot Q_{m,k} = 0$

Men for  $k \in \mathbf{A}$  er  $Q_{m,k} = 0$ , og:  $G_k(u) - u \cdot \sum_{m=1}^M G_m(u) \cdot Q_{m,k} = 1$ .

Hvis nå  $\mathbf{G}(u) = [G_1(u), G_2(u), \dots, G_M(u)]$  er vektoren som består av de genererende funksjonene, og  $\mathbf{b}$  er vektoren med 1-ere i de rekurrente tilstandenes posisjoner og 0-er i de transiente tilstandenes posisjoner, har vi følgende ligningssystem for de genererende funksjonene:

$$\mathbf{G}(u) \cdot (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q}) = \mathbf{b}.$$

De verdier på  $u$  som gjør  $\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q}$  singularer må være større enn 1 i absoluttverdi. Dette er fordi  $\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q} = -u \cdot (\mathbf{Q} - u^{-1} \cdot \mathbf{I})$  og  $u^{-1}$  må være en egenverdi for  $\mathbf{Q}$ , for at  $\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q}$  skal bli singular. Men alle egenverdiene til  $\mathbf{Q}$  er mindre enn 1 i absoluttverdi. (Beviset for dette er ganske enkelt. Det er gitt i Vedlegg 1) Hvis så  $\lambda^*$  er den største absoluttverdien til egenverdiene, er  $\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q}$  ikke-singular for  $|u| < 1/\lambda^*$ , som altså er større enn 1.

Det betyr at:

$$(6) \quad \mathbf{G}(u) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1}, \text{ for } |u| \leq 1.$$

### Eksempel

I eksemplet fra innledningen er  $\mathbf{b} = [1, 0, 0, 0, 1]$  og:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3}u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}u & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3}u & 1 & -\frac{1}{3}u & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}u & 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenverdiene til  $\mathbf{Q}$  er  $\lambda_{1,2,3} = 0$  (multiplisitet lik 3),  $\lambda_4 = \frac{2}{3}$  og  $\lambda_5 = -\frac{2}{3}$ . Da eksisterer  $\mathbf{G}(u)$  for  $-\frac{3}{2} < u < \frac{3}{2}$ .

Utrengingen  $\mathbf{G}(u) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1}$  kan overlates til en symbolsk lommeregner, som gir:

$$[G_1(u), G_2(u), G_3(u), G_4(u), G_5(u)] = \left[ 1, \frac{u \cdot (3 + 2u^2)}{9 - 4u^2}, \frac{5u^2}{9 - 4u^2}, \frac{u \cdot (6 - u^2)}{9 - 4u^2}, 1 \right].$$

### Sannsynlighetsfordelingene for $T_1, T_2, \dots, T_M$

Funksjonene  $G_1(u), G_2(u), \dots, G_M(u)$  vil *alltid* vil være rasjonale funksjoner i  $u$ . Og disse rasjonale funksjoner vil det alltid være mulig å utvikle i Maclaurinrekker som konvergerer for  $|u| \leq 1$ , og som vil gi oss sannsynlighetsfordelingene til  $T_1, T_2, \dots, T_M$ .

### Eksempel

Maclaurinrekkene til  $G_2(u), G_3(u)$  og  $G_4(u)$  gir sannsynlighetsfordelingene til  $T_2, T_3$  og  $T_4$ :

$$G_2(u) = \frac{1}{3}u + \frac{5}{4} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} u^{2n-1} \quad (\text{Se Vedlegg 2}) \Rightarrow$$

$$P(T_2 = 1) = \frac{1}{3}, \quad P(T_2 = 2n) = 0 \quad \text{og} \quad P(T_2 = 2n + 1) = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1}, \quad \text{for } n \geq 1.$$

(Absorpsjon kan kun skje etter et odde antall overganger.)

$$G_3(u) = \frac{5}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} u^{2n} \Rightarrow P(T_3 = 2n - 1) = 0 \quad \text{og} \quad P(T_3 = 2n) = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}, \quad \text{for } n \geq 1.$$

$$G_4(u) = \frac{2}{3}u + \frac{5}{8} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1} u^{2n+1} \Rightarrow$$

$$P(T_4 = 1) = \frac{2}{3} \quad \text{og} \quad P(T_4 = 2n + 1) = \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1} \quad \text{og} \quad P(T_4 = 2n) = 0, \quad \text{for } n \geq 1.$$

### Forventninger og varianser til absorpsjonstidene

Når de sannsynlighetsgenererende funksjonene  $G_k(u)$  til variablene  $T_k$  er kjente, finner vi forventningene og varianser fra (3) og (4).

$$\mathbf{E}[T_k] = G'_k(1) \quad \text{og} \quad \mathbf{Var}[T_k] = G''_k(1) + G'_k(1) - G'_k(1)^2.$$



### Eksempel

Både forventningen og variansen til  $T_1$  og  $T_5$  er lik null. En symbolsk lommeregner tar lett hånd om derivasjonene av  $G_2(u)$ ,  $G_3(u)$  og  $G_4(u)$ , og vi finner:

En tilfeldig gang på {1, 2, 3, 4, 5}, med absorberende ender.				
$k$	$E[T_k] = G'_k(1)$	$G''_k(1)$	$\text{Var}[T_k]$	$\text{Sd}[X]$
2	$\frac{17}{5} = 3.4$	$\frac{372}{25}$	$\frac{168}{25} = 6.72$	2.59
3	$\frac{18}{5} = 3.6$	$\frac{378}{25}$	$\frac{144}{25} = 5.76$	2.4
4	$\frac{11}{5} = 2.2$	$\frac{186}{25}$	$\frac{119}{25} = 4.76$	2.18

Tabell 5 – Forventninger og standardavvik til absorpsjonstidene.

Nå er det imidlertid mulig å derivere matriseligningen  $\mathbf{G}(u) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1}$ , direkte.

I Vedlegg 3 viser vi at:

$$(7) \quad \mathbf{G}'(1) = [G'_1(1), G'_2(1), \dots, G'_M(1)] = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$$

og

$$(8) \quad \mathbf{G}''(1) = [G''_1(1), G''_2(1), \dots, G''_M(1)] = 2\mathbf{b} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}.$$

### Eksempel

For å benytte disse formlene trenger vi vektoren  $\mathbf{b} = [1, 0, 0, 0, 1]$  og matrisene:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & 0 \\ 0 & \frac{7}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{9}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{7}{5} & 0 \\ 0 & \frac{8}{15} & \frac{4}{5} & \frac{14}{15} & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriseproduktene i (7) og (8) tar en symbolsk lommeregner seg av. Dette gir naturligvis de samme svarene som vi har funnet tidligere:

$$\mathbf{G}'(1) = \left[ 0, \frac{17}{5}, \frac{18}{5}, \frac{11}{5}, 0 \right] \quad \text{og} \quad \mathbf{G}''(1) = \left[ 0, \frac{372}{25}, \frac{378}{25}, \frac{186}{25}, 0 \right].$$

## 4 DEN GENERELLE GAMBLERS RUIN-MODELLEN

Den generelle Gamblers Ruin-modellen er en Markovkjede på  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ , hvor tilstandene 0 og N er absorberende. For  $k = 1, 2, \dots, N - 1$  er ettskrittets overgangssannsynlighetene:

$$P_{k-1,k} = P(X_{n+1} = k - 1 \mid X_n = k) = q \quad \text{og} \quad P_{k+1,k} = P(X_{n+1} = k + 1 \mid X_n = k) = p, \quad \text{hvor } p + q = 1,$$

Feller [1968] utleder de genererende funksjoner for absorpsjonstidene  $T_k$  ved å stille opp – og løse – et sett med differensligninger.

Med en liten endring i Fellers notasjon er disse gitt som:

$$G_k(u) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k \left(\lambda_1^{N-k}(u) - \lambda_2^{N-k}(u)\right) + \left(\lambda_1^k(u) - \lambda_2^k(u)\right)}{\left(\lambda_1^N(u) - \lambda_2^N(u)\right)}, \text{ hvor } \lambda_{1,2}(u) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pq \cdot u^2}}{2p \cdot u}.$$

Hvis vi skal bruke disse på vårt eksempel må vi omnummerere tilstandene til 0, 1, 2, 3 og 4, og sette  $p = 2/3$  og  $q = 1/3$ . Hvor utrolig det enn kan synes, gir Fellers formler de samme enkle uttrykkene som vi har funnet:

$$[G_0(u), G_1(u), G_2(u), G_3(u), G_4(u)] = \left[1, \frac{u \cdot (3 + 2u^2)}{9 - 4u^2}, \frac{5u^2}{9 - 4u^2}, \frac{u \cdot (6 - u^2)}{9 - 4u^2}, 1\right].$$

Fellers resultat er altså mer generelt enn vår ligning (6) når det kommer til Gamblers ruin, i og med at både  $p$  og  $N$  er vilkårlige.

Vi våger ikke å prøve å finne et generelt uttrykk for  $(\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1}$  i den generelle modellen.

Men vår ligning (6) handler om Markovkjeder generelt – og *ikke* Gamblers ruin spesielt. Med dagens matematikkprogram, som f.eks. Mathematica, vil dette være håndterbart selv for store utfallsrom  $\Omega$ . Mathematica finner inverse matriser og bestemmer Maclaurinrekker for de fleste funksjoner.

## 5 VEDLEGG

### Vedlegg 1 – Egenverdiene til $\mathbf{Q}$

Matrisen  $\mathbf{Q}$  inneholder ettskrittets overgangssannsynlighetene mellom de transiente tilstandene og  $\mathbf{Q}^n$  inneholder  $n$ -skrittets overgangssannsynlighetene  $P(X_n = m \mid X_1 = k)$ , for  $k, m \in \Omega \setminus \mathbf{A}$ . Disse sannsynlighetene konvergerer til 0 når  $n \rightarrow \infty$ . (Korollar 3.1, Nissen-Meyer [1970].) Det vil si:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Q}^n = \mathbf{0}$  (null-matrisen).

Når  $\lambda$  er en egenverdi for  $\mathbf{Q}$ , med en egenvektor  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , er  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ , og videre er:  $\mathbf{Q}^2 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{Q} \cdot \lambda \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v} = \lambda^2 \cdot \mathbf{v}$ .  $\lambda^2$  er en egenverdi for  $\mathbf{Q}^2$ , med  $\mathbf{v}$  som egenvektor. Dette generaliseres umiddelbart til at  $\lambda^n$  er en egenverdi til  $\mathbf{Q}^n$ , med  $\mathbf{v}$  som egenvektor.

$$\mathbf{Q}^n \cdot \mathbf{v} = \lambda^n \cdot \mathbf{v}.$$

Venstre side går mot null-vektoren når  $n$  går mot uendelig, og da må også høyre side gjøre det. Dette betyr at  $\lambda$  må være mindre enn 1 i absoluttverdi.

### Vedlegg 2 – Maclaurinrekken for $G_2(u)$

En delbrøkkoppspalting av  $G_2(u)$  viser at:

$$G_2(u) = \frac{u \cdot (3 + 2u^2)}{9 - 4u^2} = \frac{15}{8} \cdot \left( \frac{1}{3 - 2u} - \frac{1}{3 + 2u} \right) - \frac{u}{2} = \frac{5}{8} \cdot \left( \frac{1}{1 - \frac{2}{3}u} - \frac{1}{1 - (-\frac{2}{3}u)} \right) - \frac{u}{2}.$$

Så benytter vi den velkjente formelen for en uendelig geometrisk rekke:

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ for } |x| < 1.$$

Dette bruker vi på de to brøkene inne i parentesen og får:

$$\frac{1}{1-\frac{2}{3}u} - \frac{1}{1-(-\frac{2}{3}u)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot u^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot u^n = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \cdot u^{2n-1}.$$

Da blir:

$$G_2(u) = \frac{5}{4} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \cdot u^{2n-1} - \frac{1}{2}u = \frac{1}{3}u + \frac{5}{4} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-1} \cdot u^{2n-1}.$$

### Vedlegg 3 – Derivasjon av matriser

En matrise  $\mathbf{A}(x) = (a_{m,k}(x))$  deriveres ved å derivere hvert element:  $\mathbf{A}(x)' = (a_{m,k}'(x))$ .

Det er lett å vise at produktregelen for derivasjon også gjelder for matriseprodukt:

$$(\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{B}(x))' = \mathbf{A}(x)' \cdot \mathbf{B}(x) + \mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{B}(x)'$$

Dette, anvendt på derivasjon av  $(\mathbf{A}(x) \cdot \mathbf{A}(x)^{-1})' = \mathbf{I}' = \mathbf{0}$ , gir regelen for inverse matriser:

$$(\mathbf{A}(x)^{-1})' = -\mathbf{A}(x)^{-1} \cdot \mathbf{A}(x)' \cdot \mathbf{A}(x)^{-1}$$

Da blir:

$$\left[ (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1} \right]' = -(\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1} \cdot (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})' \cdot (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1} = (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \left[ (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1} \right]'' &= \left( (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1} \right)' = \\ &= \left[ (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1} \right]' \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1} + (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \left[ (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1} \right]' = \\ &= 2 \cdot (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{I} - u \cdot \mathbf{Q})^{-1}. \end{aligned}$$

Setter vi så  $u = 1$ , får vi:

$$\mathbf{G}'(1) = \left[ G_1'(1), G_2'(1), \dots, G_M'(1) \right] = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$$

og

$$\mathbf{G}''(1) = \left[ G_1''(1), G_2''(1), \dots, G_M''(1) \right] = 2\mathbf{b} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}.$$

### Litteratur

Feller, William

*An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Volume 1*, 3. Edition. John Wiley & Sons. 1968.

Nissen-Meyer, Sven

*Forelesninger over genererende funksjoner og stokastiske prosesser*. Matematisk Institutt, Universitetet i Bergen. 1970.

Ross, Sheldon M.

*Introduction to Probability Models*. 7. Edition. Harcourt/Academic Press. 2000.

---

# Nordlys, og den norske romforskeren Kristian Birkeland

Tekst: Linn-Kristine Glesnes Ødegaard

Det er ikkje berre Sjøkrigsskolen som har stort jubileum i 2017. I år er det også 150 år sidan den norske vitskapsmannen Kristian Birkeland vart fødd, og 100 år sidan han døydde av ein overdose sovemedisin, åleine på eit hotell i Tokyo. Universitetet i Oslo feira i sommar Birkelandjubileet saman med Norsk Romsenter. Universiteta i Bergen, Tromsø og på Svalbard samarbeider om forskning i eit forskingssenter dei har kalla Birkelandsenteret. Elektriske straumar i verdsrommet, som vi i dag veit er ansvarleg for det fascinerande fenomenet nordlys, vert kalla Birkelandstraumar. På 200-lappen som er i ferd med å fastas ut, er det bilete av Kristian Birkeland. Kvifor var denne mannen så viktig at vi feirar hans runde fødsels- og dødsdag, og har hatt han på pengesetelen vår i over 20 år?

---

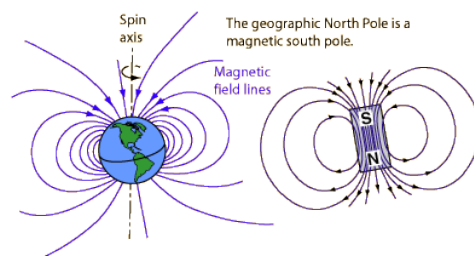
## KVA ER NORDLYS?

Ikkje alle er klar over at nordlyset har ei søster i sør, sørlyset. På latinsk er dei kjende som Aurora Borealis (nord) og Aurora Australis (sør). Tidlegare trudde ein at nordlyset og sørlyset var som spegelbilete av kvarandre, men ein veit no at det kan vera tydelege skilnader mellom lysførestillinga i dei to hemisfærene [1]. Men korleis oppstår nordlyset?

Jorda vår er omgitt av eit magnetfelt med tilnærma form som ein dipol, altså to polar – nord og sør. Som Figur 1 visar, kan vi samanlikna jorda sitt magnetfelt med ein vanleg stavmagnet (dette er ein forenkla modell, men den fungerer ganske godt nær jorda). Den magnetiske polen i den nordlege hemisfæren kallast magnetisk nord, sjølv om det faktisk er den magnetiske sørpolen som er plassert der. Om ein er nær den magnetiske nordpolen (eller sørpolen) vil eit kompass vera ubrukeleg, fordi polen då er meir eller mindre rett ned. Du kan jo prøva sjølv å sjå korleis eit kompass reagerer dersom du flyttar det litt rundt over ein av polane på ein stavmagnet? Eller så kan du søka på YouTube, prøv til dømes «Compass near North Pole».

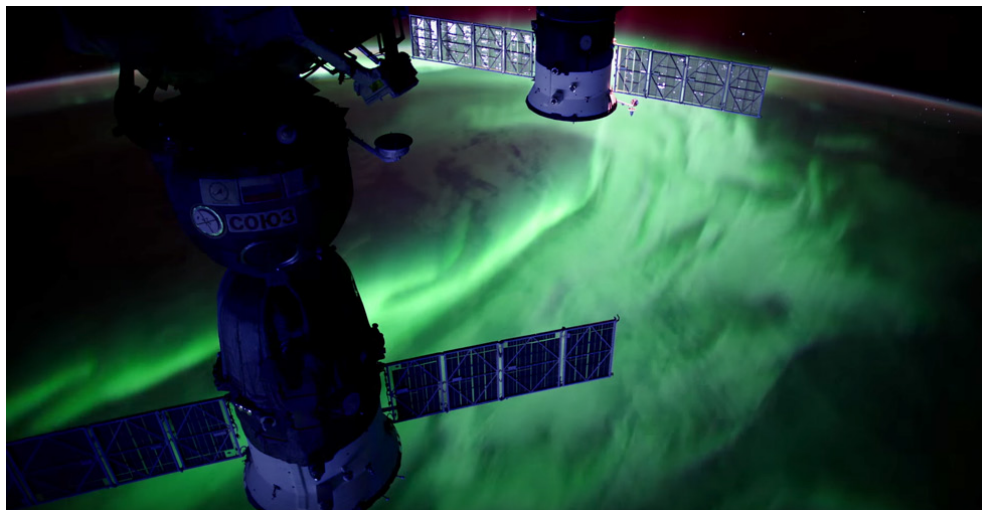
Fun fact: «Stavmagneten» inni jorda er ikkje nøyaktig på linje med spinnaksen til jorda, men omtrent 11° forskuve.

Polane er heller ikkje fikserte, men vandrar litt rundt frå år til år. I 2015 var nordpolen på Ellesmereøya i Canada. Du kjem derfor ikkje til den geografiske nordpolen om du navigerer med kompass! (Men så har vi jo også nett-opp fastslått at kompass er ganske ubrukeleg nær polane, så det hadde ikkje nytta jamvel om den magnetiske og geografiske polen var på same stad.)



Figur 1. Samanlikning av jorda sitt magnetfelt med ein vanleg stavmagnet [2].

Vi er heldige på jorda som har eit sterkt magnetfelt som skjermar oss for mesteparten av den farlege strålinga frå sola. Utan magnetfelt ville jorda lidd same skjebne



Figur 2. Skjermdump av film teken frå den Internasjonale romstasjonen ISS [3]. Her kan ein sjå nordlys laga av elektronar som kolliderer med oksygen. Ser ein nøye etter kan ein skimte korleis lyset er organisert i band som følgjer linjer som ser ut til å stå loddrett på jordkloden. Dette er magnetfeltlinjer.

som Mars, atmosfæren ville blåst vekk og strålinga ved overflata ville vere for stor til at noko kunne leve der. Ein liten del av partiklane frå sola kan likevel sleppa inn i magnetosfæren, som er det vi kallar området i verdensrommet der jorda sitt magnetfelt dominerer over andre magnetfelt (til dømes sola sitt). Magnetosfæren strekk seg omlag 10 jordradier i retning mot sola, og minst 100 jordradier på baksida. Den har form omtrent som ei tåredrøpe med den butte sida vendt mot sola. Som du skjønner frå dette, passar ikkje dipol-modellen perfekt til å skildre magnetosfæren slik den eigentleg ser ut, men tett inntil jorda, opp til 3-4 jordradier, passar dipol-modellen rimeleg bra likevel.

Nord- og sørllyset skapast av elektron og proton frå sola som sprett fram og tilbake i magnetfeltet mellom nord-polen og sør-polen. Når ein partikkel kjem så nær jorda at atmosfæren byrjar å verta tjukk, rundt omlag 100 km over bakken, så vil partikkelen kollidera med gassane i atmosfæren. Nordlyspartikkelen kan anten ionisere atmosfæregassane (slå laus eit elektron), den kan splitte opp molekyl, eller den kan eksitere eit molekyl. Eit eksitert molekyl vil seinare sende ut overskotsenergien som ein lyspartikkel (eit foton). Avhengig av kva type molekyl som eksiterast, får vi ulike bølgelengder på det utsendte fotonet, og dermed ulike farger på nordlyset. Frå kollisjon mellom elektronar og oksygen får vi raudt (630,0 nm bølgelengd) høgt oppe, og grønt (557,7 nm) nærare bakken. Frå kollisjonar med nitrogenmolekyl kjem blå-lilla lys (427 nm). Ein kan også få raudt nordlys når protonar kolliderer med oksygen. Figur 2 visar eit bilete teken frå den internasjonale romstasjonen av grønt elektron-nordlys.

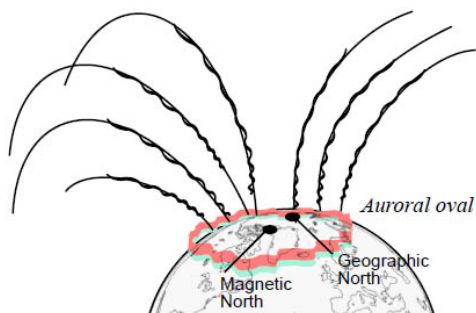
Om du er så heldig å ha opplevd nordlys, såg det sannsynlegvis grønt ut. Men du kan òg ha sett det som noko gråleg, og lurt på om du såg på ei sky eller om det faktisk kunne vera nordlys. Du har kanskje høyrst at baki auget har vi nerveceller kalla stavar og tappar, og at det i hovudsak er tappane vi ser med i dagslys (og som gir oss fargesyn) og stavane i mørket. Stavane er gode til å fange inn lys om natta, men kan ikkje bestemme kva bølgelengd, og altså kva farge, lyset har. Då vil du oppleve nordlyset som grått. Men, viss intensiteten på lyset er kraftig nok, så vil etter kvart tappane registrere det grøne i nordlyset. Grøn er nemleg den fargen tappane kan sjå aller best mot mørke bakgrunnar [4].

Raudt og blå-lilla nordlys kan vera vanskeleg å sjå med det blotte auget. Du har størst sjans til å sjå det dersom du er ute ganske lenge, slik at natssynet er best mogleg. Sjå etter det raudt nordlyset over det grøne, og det blå under (ein bør altså vere eit stykke sør eller nord for nordlyset, og ikkje rett under, slik at ein kan sjå det mest mogleg frå sida). Ein kan, når nordlyspartiklane har ekstra høg energi, òg få raudt nordlys under det grøne. Då skjer kollisjonen med nitrogen.

Nord- og sørllyset opptrer i ovalar rundt sine respektive magnetiske polar. Fordi dei ladde partiklane i magnetosfæren er bundne til magnetfeltet, kan dei ikkje gå kor som helst, men berre følgje magnetfeltlinjene ned til bakken på høge breiddegradar der magnetfeltet «går inn i jorda» (ein kan sjå på Figur 1 og Figur 3 at magnetfeltet går inn i, og kjem ut av, bakken ved polane). I ekvatorområda er magnetfeltet meir eller mindre parallelt med jordoverflata. Når dei ladde partiklane går langs jorda

sitt magnetfelt, utgjer dei ein elektrisk straum, kjend som Birkelandstraumar.

Magnetfeltlinjene som skjer jordoverflata inni ovalen, er det vi kallar for opne feltlinjer. Desse feltlinjene oppfører seg ikkje som magnetfeltlinjer i ein dipol, dei heng nemleg berre fast i jordkloden anten i sør eller i nord. Ein partikkel som er på ei open feltlinje vil difor ikkje kunne sprette fram og tilbake, men vil berre forsvinne ut i det store rommet og bli borte for alltid.



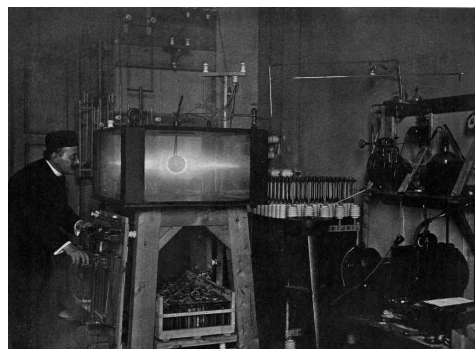
Figur 3. Nord- og sørløset kan sjåast i ein oval sentrert rundt dei magnetiske polane. Det er fordi partiklane i magnetosfæren er bundne til magnetfeltlinjene, og dei kan berre kome ned til jordoverflata der magnetfeltet skjer bakken. Figuren er henta frå [5]. Dei ladde partiklane som reiser opp og ned langs magnetfeltet, kallast for Birkelandstraumar.

No tenkjer du kanskje: sidan partiklane anten forsvinn ut på dei opne feltlinjene eller kolliderer med atmosfæregassane og lagar nordlys – vert det ikkje tomt for partiklar til slutt då? Det gjer det ikkje, fordi sola stadig fyller på. Dei fleste av elektrona og protona i magnetosfæren kjem frå sola. Dei bles konstant avgårde med solvinden. Av og til har sola store utbrot, gjerne kalla solstormar. Når sola har utbrot, slynger ho enorme mengder med partiklar og fotonar ut i verdensrommet på kort tid og med høg hastigheit. Det er i slike tilfelle vi kan få nordlysutbrot på jorda. Då fyllast magnetosfæren opp med ladde partiklar. Fleire magnetfeltlinjer vert opna, med det resultat at nordlysovalen flyttar seg mot ekvator. Jo sterkare solstorm, jo lengjer mot ekvator er det mogleg å sjå nord- og sørløset. Eit slikt utbrot kan vara frå ein halvtime til nokre få timar. Når solstormen er ferdig og partikkelpopulasjonen i magnetosfæren er tømt til normalnivå, lukkast fleire feltlinjer og nordlysovalen flyttar seg mot høgare breiddegradar att. Det er alltid litt partiklar som sprett fram og tilbake i magnetosfæren, og nokre vil alltid ha nok energi til å nå ned til atmosfæren og kollidera. Derfor er nordlyset aldri heilt avslått! Det er berre veldig svakt, og langt nord. I mørketida er det mogleg å sjå den svake nordlysovalen på Svalbard dersom ein har godt nattsyn, sjølv når det ikkje er utbrot. Under ein solstorm er Svalbard altfor langt

nord, då vandrar nordlysovalen minst ned til Tromsø, og kanskje til og med til Trondheim, eller av og til heilt ned til Bergen.

## KRISTIAN BIRKELAND OG NORDLYSET

Birkeland var ein av dei første som forsto at nordlyset vart laga av partiklar som var komen heile vegen frå sola. I det berømte Terrella-eksperimentet klarte han endåtil å visa korleis elektronar fekk det til å gløda rundt polane til ei magnetisert kule, ein jordklode i miniatyr, to år før elektronet var oppdaga av J. J. Thompson. I Figur 4 ser ein Birkeland til venstre for sitt berømte Terrella-eksperiment.



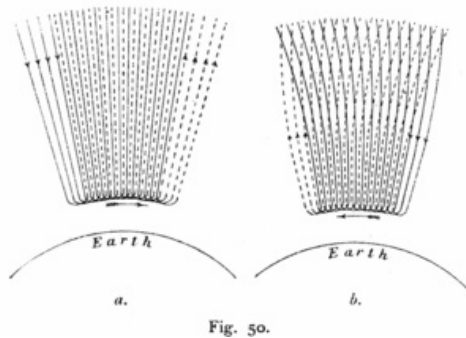
Figur 4 Bilete frå Kristian Birkeland si eiga bok [6] (digital kopi [7]). Biletet visar Kristian Birkeland og hans berømte Terrella-eksperiment. I vakuummammeret viste han korleis elektronar fekk det til å gløda rundt polane til ei magnetisert kule, nett slik nordlyset gjer.

I åra 1899-1900 leia Kristian Birkeland ein ekspedisjon til Halddetoppen der han laut bygga eit nordlysobservatorium. Ein av grunnane til at Birkeland ville bygga observatoriet sitt på ein fjelltopp, var at det framleis var uavklart kor langt ned nordlyset kunne rekka. Planen til Birkeland var å triangulera høgda til nordlyset, i samarbeid med ein kompanjong på ein nabofjelltopp. Diverre mislukkast Birkeland i det, og ikkje før nokre år seinare kunne ein annan norsk vitenskapsmann, Carl Størmer, slå ein endeleg strek over diskusjonen [5] [7]. Nordlyset kan ikkje nå ned til tretoppene, men til omlag 100 km over bakken.

Ekspedisjonen var likevel ikkje forgjeves. Foruten å ta bilde av nordlyset tok dei magnetfeltmålingar, og dei kunne raskt konkludera med at forstyrningar i jorda sitt magnetfelt var knytt til nordlysaktivitet. Birkeland sin teori var at magnetfeltforstyrringane var forårsaka av straumar som følgde magnetfeltet ned mot jorda, for så å bøya av langs nordlysbuane. Dette er i grove trekk den rådande teorien den dag i dag. For å styrka teorien sin om straumar i atmosfæren samanlikna Birkeland

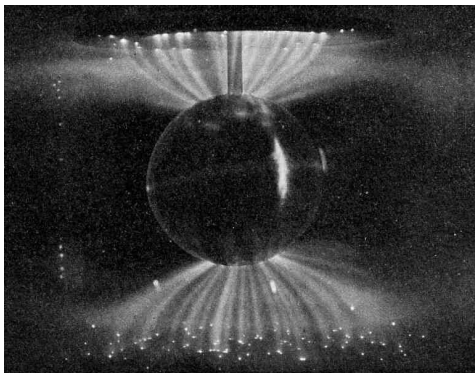


sine magnetfeltmålingar med samtidige målingar frå lågare og høgare breiddegradar, og kunne tydeleg finne at retninga på magnetfeltfluktusjonane stemmer med det ein kan forvente dersom det går ein straum [6] [8] [9]. Birkeland sin eigen illustrasjon av dette er vist her i Figur 5.



Figur 5. Sisse av magnetfelt rundt ein straum, laga av Kristian Birkeland [6].

Inspirasjonen til at nordlyset vart laga av partiklar som kom heile vegen frå sola fekk Birkeland frå eit fenomen som nyleg var oppdaga: røntgenstråling. Han bygga seg eit vakuumkammer, plasserte ei magnetisert kule malt med fluoriserande maling inni, og sende katodestrålar (elektronar) mot «jordkloden». Det han observerte, var lysande ringar rundt polane på kula, og at elektrona vart leia av magnetfeltet (sjå Figur 6).



Figur 6. Nordlyslignande Birkelandstraumar skapt i Terrella-eksperimentet av Kristian Birkeland [10].

Birkeland vart nominert til Nobelprisen heile 7 gongar, men fekk aldri prisen. Han døydd i 1917, 49 år gammal, åleine på eit hotellrom i Tokyo. I Noreg er han mest kjend for å ha starta Norsk Hydro saman med Sam Eyde. Dette var eit av Birkeland sine mange, mange forsøk på å tene pengar, slik at han kunne via tida si til forskning på

nordlyset (som han ikkje tente særleg med pengar på). Til saman tok han ut 59 patenter på oppfinningar han gjorde! I resten av verda er Kristian Birkeland kjend som ein av dei første som knekte nordlysgåta, og er kanskje ein av Noregs mest kjende forskarar internasjonalt. Han har verkeleg fortent sin plass på 200-lappen.



Figur 7. Til venstre ser vi framsida av den norske 200-lappen (under utfasing), til høgre, baksida [11] [12]. Forutan biletet av Birkeland er Terrella-eksperimentet inkludert i vatnmerket til venstre. Som bakgrunn til portrettet av Birkeland ser vi nordlys, sett nedanfrå opp mot pol [13].

## BIBLIOGRAFI

- [1] K. M. Ø. N. Laundal, «Asymmetric auroral intensities in the Earth's Northern and Southern hemispheres,» *Nature* 460, pp. 491-493, 23 07 2009.
- [2] «Magnetic Field of the Earth,» [Internett]. Available: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/magnetic/MagEarth.html>. [Funnen 31 10 2017].
- [3] «NASA,» [Internett]. Available: <https://www.nasa.gov/image-feature/goddard/2016/stunning-aurora-from-space>.
- [4] «Cone cell,» [Internett]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Cone\\_cell](https://en.wikipedia.org/wiki/Cone_cell).
- [5] «Modern Survival Blog,» [Internett]. Available: <http://modernsurvivalblog.com/space/aurora-the-bright-side-of-solar-doom-and-gloom/>.
- [6] K. Birkeland, *The Norwegian Aurora Polaris Expedition 1902-1903, Volume 1: On the Cause of Magnetic Storms and The Origin of Terrestrial Magnetism*, 1913.
- [7] «Kristian Birkeland and His Terrella experiment,» [Internett]. Available: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Birkeland-terrella.jpg>. [Funnen 31 10 2017].
- [8] A. Brekke, *Nordlyset: kulturar og vitenskap*, 1994.
- [9] L. Jago, *Nordlysets gåte - Beretningen om Kristian Birkeland*, Gyldendal, 2001.
- [10] «Auroral-like Birkeland currents,» [Internett]. Available: [https://en.wikipedia.org/wiki/Birkeland\\_current#/media/File:Birkeland-anode-globe-fig259.jpg](https://en.wikipedia.org/wiki/Birkeland_current#/media/File:Birkeland-anode-globe-fig259.jpg).
- [11] «200-krone forside,» [Internett]. Available: By Source, Fair use, <https://en.wikipedia.org/w/index.php?curid=15262856>. [Funnen 31 10 2017].
- [12] «200-krone bakside,» [Internett]. Available: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?curid=15262908>.
- [13] «200-kroneseddel - motivene,» [Internett]. Available: <http://www.norges-bank.no/Sedler-og-mynter/Sedler/200-kroneseddel/beskrivelse-200/>.



## «Jeg ville i alle fall ikke dø uten å kjenne svaret.»

- Julia Robinson  
(1919 - 1985)

Tekst: Ellen Margit Krätzig-Berle

FoU, Forskning og Utvikling, er en viktig ingrediens i porteføljen til alle som jobber innen utdanning. Målet med denne artikkelen er å sette fokus på forskning og dertil hørende utfordringer, her illustrert ved et eksempel fra matematikken. Hvordan må interesse, kunnskap, stahet, utholdenhet og støtte fra fagmiljøer jobbe sammen for at resultater kan oppnås?



Det var en varm augustmorgen i året 1900, at David Hilbert, en av datidens (og kanskje en av tidenes) største matematikere, holdt et foredrag ved Sorbonne-universitetet i Paris, et foredrag som siden har blitt historisk. Her presenterte han 23 matematiske problemer som på dette tidspunktet var uløste, og som han anså å være retningsvisende for matematikkens utvikling inn i det 20. århundre. Av disse er femten nå løst, tre er fortsatt uløst, og for resten av dem har man funnet frem til delvise løsninger.

Et eksempel på disse problemene er det åttende, som er knyttet opp mot spørsmål rundt primtall. Mange har prøvd seg på dette, men det er fortsatt mye vi ikke vet om primtall, så dette problemet ansees som fortsatt uløst. Et annet av Hilberts problem omhandler de såkalte diofantiske<sup>1</sup> ligninger. Det er ligninger av formen, der  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , der  $f$  er et polynom i  $n$  variabler med heltallskoeffisienter, f.eks.  $3x_1 + 9x_2 = 8$  eller litt mer komplisert. Det har i lang tid vært en velkjent problemstilling å søke heltallsløsninger til slike ligninger<sup>2</sup>. Vi ser for eksempel fort at det ikke finnes hele tall som passer inn i den første ligningen.

$$(3x_1 + 9x_2 = 8 \Rightarrow x_1 = \frac{8}{3} - 3x_2)$$

(som alltid vil gi tredeler så lenge  $x_2$  er et helt tall.)

Det er også lett å se at  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$  passer inn i den andre ligningen<sup>3</sup>.

Det man søkte etter, var generelle løsningsmetoder til slike ligninger, altså algoritmer som kunne finne løsninger. Nå var man nok generelt klar over at dette var vanskelig (og vi har jo også bare vært heldige med våre to eksempler ovenfor, fordi løsningene var lette å se).

Derfor stilte Hilbert heller spørsmålet: Er det mulig å avgjøre om en diofantisk ligning i det hele tatt er løslar? Dette var det tiende problemet på Hilberts liste.<sup>4</sup> Man hadde etter hvert en anelse om at en slik metode ikke fantes, men hvordan kunne man bevise det? Store matematikere har beskjefteget seg med dette, og har etterhvert nærmet seg løsningen skritt for skritt. Det store gjennombruddet ble gjort av den amerikanske matematikeren Julia Robinson, og det avgjørende beviset fant russeren Yuri Matiyasevich i 1970. Han var da 22 år gammel!

Julia Bowman Robinson ble født i desember 1919 i Missouri. Hennes mor døde da Julia bare var to år

gammel, og hun vokste opp i Arizonas ørken hos sin bestemor. Det var en heller ensom oppvekst, der hennes eldre søster stort sett var den eneste lekekameraten hun hadde.

Og når hun da ikke hadde så mye annet å beskjefteget seg med, ble hun veldig oppmerksom på og etter hvert interessert i forskjellige slags strukturer og mønstre i naturen omkring henne. Hun skrev: «Jeg husker da jeg som barn satt i skyggen av en stor kaktus og prøvde å lage mønstre med småstein.» Det var nok med på å utvikle hennes sans for matematiske sammenhenger. «Jeg tror jeg har alltid hatt et nært forhold til de naturlige tall. For meg er de den eneste virkeligheten.», er hennes oppsummering av barndommens fasinasjon.

Men barndommen hennes ble vanskelig, ni år gammel ble hun svært syk og var sengeliggende i et helt år. Selv om hun nok ikke utviklet seg til et «matematikk-geni» i denne tiden, utviklet hun likevel en del egenskaper som siden kom henne til gode der hun slåss med matematiske formler og teoremer. Hun skriver blant annet at hun måtte øve seg i tålmodighet. Stemoren som hun etter hvert hadde fått, påsto at hun var det stæste menneske hun kjente, og nettopp denne staheten har nok vært viktig for hennes suksess innen matematisk forskning.

Sykdommen hadde ført til at hun hadde mistet to til tre års skolegang, det tok hun ganske fort igjen ved hjelp av privatlærer. Tilfeldigvis fortalte denne læreren en gang om hvordan allerede de gamle grekerne for 2000 år siden visste at kvadratrotten av 2 ikke kunne skrives eksakt som en brøk, dvs. at den som desimaltall aldri ville kunne bli periodisk. Det hadde de klart ved bare noen enkle logiske konklusjoner! Hun var fasinert over at man, uten å regne på det, kunne være helt sikker på at det ikke en eller annen gang, langt ut i desimalene, likevel kunne dukke opp en periode. Dette måtte hun sjekke ut, og sta som hun var satte hun seg ned og regnet ut desimaler til en kvadratrotten en hel ettermiddag! Men uendelig mange desimaler er uendelig mange desimaler, så hun ga omsider opp. Uansett hadde dette lært henne at kraften i en matematisk argumentasjon var sterkere enn det å kunne regne seg frem til et svar. Altså, uansett hvor mange desimaler hun kom til å regne ut, ville hun aldri på den måten kunne bevise det som noen enkle, men smarte matematiske idéer uomtvistelig slo fast. (Om du er interessert, finnes beviset i Mathematica Vulgara 1, kap. 1.8)

<sup>1</sup> Diofant, også kjent som Diofantus av Alexandria, var en gresk matematiker i den hellenistiske perioden, han levde sannsynligvis mellom 200 og 300 e.Kr. Det er lite som er kjent om livet hans, bortsett fra at han bodde og virket i Alexandria i Egypt.

<sup>2</sup> At man bare ser på løsninger i hele tall gir mening og er faktisk nødvendig i forhold til problemstillinger som har å gjøre med kongruenser og spørsmål om hvorvidt visse tall kan deles på hverandre. Det er også opplagt at når forskjellige produkter etter en gitt nøkkel skal fordeles på forskjellig steder, er bare heltallsløsninger meningsfulle.

<sup>3</sup> Den kan gjerne ha flere løsninger!

<sup>4</sup> Det Hilbert egentlig etterspurte, var eksistensen av en form for datamaskin (som inneholdt slike algoritmer), lenge før man i det hele tatt hadde begynt å tenke på computer.

Dette satte for alvor i gang hennes interesse for matematikken utover det hun lærte på skolen, og hun ble etter hvert den eneste jenten igjen i både matematikk- og fysikk-klassen. Hun elsket å spalte opp store tall i sine primfaktorer, og hun fulgte med på utviklingen av regnemaskiner som etter hvert begynte å dukke opp. Som en liten kuriositet fantes det i hennes etterlatenskaper en liten artikkel som tydeligvis hadde gjort inntrykk på den tiden, siden hun hadde klippet den ut av en avis: «Dr. Samuel I. Krieger brukte opp seks blyanter, 72 sider skrivepapir og en stor bunt med nerver, før han kunn-gjorde det hittil største kjente primtallet, nemlig: 231 584 178 474 632 390 847 141 970 017 375 815 706 539 969 331 281 128 078 915 826 259 279 871. Han kunne imidlertid ikke si hvem som kunne være interessert i noe slikt.» Vel, det viste seg å være mer nyttig enn Krieger hadde trodd, siden dette tallet faktisk kan deles på 47. Men det var det nok heller ingen som brydde seg om! Alle disse beregningene må sees i lys av at det ikke fantes hverken kalkulatorer eller datamaskiner på den tiden, alt var regnet ut for hånd! Det setter foreldrenes gave som hun fikk til skoleavslutningen i et spesielt perspektiv. Det var nemlig en regnestav!

Så begynte studentlivet som 16-åring. Hun startet selvfølgelig i matematikk, ved universitetet i San Diego. Som matematiker og kvinne hadde hun ikke store forhåpninger om en akademisk karriere, man ble lærer, så det var hun forberedt på. Men ved instituttet var det få som forsto hennes brennende interesse for matematikk, og hun trivdes ikke. Derfor skiftet hun over til University of California i Berkeley. Her møtte hun lærere og studenter som delte hennes lidenskap. Især forelesningene i tallteori med dosent Raphael Robinson gjorde inntrykk, og det sies at han snart skjønnte at veien til hennes hjerte gikk gjennom matematikken. De gikk lange turer mens de diskuterte de nyeste resultatene, siden giftet de seg i 1941.

Men livet ble vanskelig igjen. I henhold til universitetets regler kunne ikke mann og kone være medlemmer på samme institutt. Det betydde at hun ikke kunne fortsette karrieren sin ved matematisk institutt, men måtte skifte over til statistikk, der hun en stund jobbet med militære prosjekter. Etter hvert oppdaget hun at hun ikke kunne få barn. Det skyldtes at hennes sykdom fra barndommen hadde svekket helsen hennes, det plaget henne hele livet. Det førte til at hun i en periode var depressiv og ikke i stand til å jobbe. Men etter hvert klarte ektemannen å vekke hennes interesse for matematikk igjen.

Det var i 1948 at hun disputerte for doktorgraden. Og nå begynte hun for alvor å beskjeftige seg med Hilberts tiende problem, som snart ble til en besettelse. Etter at hun hadde vært så syk som barn, hadde legen hennes ikke gitt henne stort håp om å bli så veldig mye eldre enn 40. «Hvert år, når jeg på bursdagen min blåste ut lysene på kaken, ønsket jeg meg at dette problemet endelig ville bli løst – ikke nødvendigvis av meg, men rett og slett løst! Jeg ville i alle fall ikke dø uten å kjenne svaret.» Det var mantraet hennes.

Hun hadde beskjeftiget seg mye med Alan Turing<sup>5</sup>s maskiner. Dette var matematiske regnemodeller som definerte abstrakte maskiner som manipulerer symboler på en papirstrimmel i henhold til et sett av regler. Til tross for modellens enkelhet kan man til enhver computer-algoritme konstruere en Turing maskin som er i stand til å simulere dens logikk. Turing hadde bevist at hans universelle maskin likevel ikke ville kunne svare på alle matematiske spørsmål. Men Robinson trodde at denne maskinen ville kunne brukes til å gi svar på hennes problem. Hun klarte ganske snart å vise at Hilberts problemstilling kunne forenkles mye (dette ble siden kalt for «The Robinson hypothesis»<sup>6</sup>), og hun jobbet iherdig med å bevise denne hypotesen. Hun var så nær en løsning, men hele hennes teori hvilte til slutt på en eneste stein i den matematiske veggen, og fant hun ikke denne, ville alt ramle sammen. Alt arbeidet ville vært bortkastet. Men hun visste jo ikke om denne steinen i det hele tatt eksisterte, og det var etter hvert mange som tvilte på om dette virkelig var den rette veien å løse Hilberts tiende problem.

Dette er kanskje den største fortjenesten hennes som matematisk forsker, og den som ikke har prøvd det, vet ikke hvordan det føles. Hun jobbet med å bevise en teori som hun ikke visste om var rett. Hun visste ikke engang om problemet som skulle løses, var løsbart, og hun visste heller ikke om hun hadde funnet den rette veien mot løsningen. Hun beskriver, litt spøkefullt, sin arbeidsdag slik: «Mandag; prøver å bevise teoremet, tirsdag; fortsetter å prøve å bevise teoremet, onsdag; prøver stadig å bevise teoremet, torsdag; prøver fremdeles å bevise teoremet, fredag; teoremet viser seg å være feil!» Hun befant seg så å si i et ingenmannsland, hvor hun ikke var sikker på noen ting og der mange tvilte på henne. Men hun hadde lagt ned så mye arbeid, brukt så mye tid og krefter, at det nesten ikke gikk an å tenke seg at alt skulle ha vært bortkastet! Og i denne usikkerheten levde hun lenge!

<sup>5</sup> Filmen «The Imitation Game» er basert på historien om Alan Turing.

<sup>6</sup> Hypotesen påstår at man bare trengte å konstruere én ligning som hadde en helt bestemt mengde av tall som løsning, nemlig en som vokste eksponentielt. Da ville man ha vist at det ikke fantes en metode til å avgjøre ligningers løsbarehet, og Hilberts tiende problem hadde vært løst!

Likevel ga hun ikke opp, hennes stahet førte omsider til løsningen av Hilberts tiende problem, men til slutt var det likevel ikke hun som fant den. Det var i 1970, dvs. 22 år etter at hun hadde begynt på å beskjeftige seg med det, at den unge russeren Yuri Matiyasevich fant denne siste steinen som manglet i Julia Robinsons bevis. Endelig kunne man konkludere med at det ikke finnes en fremgangsmåte som vil avgjøre om en diofantisk ligning er løsbart. Det betydde da også at man ikke lenger trengte å lete etter en generell måte å løse slike ligninger på. Robinson sendte sine gratulasjoner til Matiyasevich og skrev: «Jeg fryder meg spesielt når jeg tenker på at du fremdeles var en baby da jeg var kommet frem til min antakelse om hvordan problemet kunne løses. Jeg måtte bare vente til du ble voksen.»

Hennes og Matiyasevichs fremgangsmåte har siden også ført til at man har klart å finne en formel (i hvert fall teoretisk) som leverer alle primtall. Man har altså også kommet nærmere en løsning av Hilberts åttende problem. Men hans tiende problem var nå endelig løst, og da Julia Robinson blåste ut lysene på bursdagskaken sin det året «mistet hun plutselig pusten, i det hun ble klar over at hennes mangeårige ønske endelig var gått i oppfyllding.»

#### KILDER:

- Marcus du Sautoy. *The music of the primes*, London: Fourth Estate 2003, ISBN 1 84115 580 2
- *Julia Robinson Facts*, <http://biography.yourdictionary.com/julia-robinson>
- *20th Century Mathematics – Robinson and Matiyasevich*, [http://www.storyofmathematics.com/20th\\_robinson.html](http://www.storyofmathematics.com/20th_robinson.html)
- *Biographies of Women Mathematicians: Julia Bowman Robinson*, [www.agnesscott.edu/lriddle/women/robinson.htm](http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/robinson.htm)
- Ellen Berle, Tore Langholm, Knut Meen, *Mathematica Vulgara 1*, SKSK, 2015

---

# Ingeniørfaglig innføring, eit mønsterfag for SKSK?

Tekst: Lars Olav Tveita

Dette faget kom inn som eit nytt emne i marineingeniørutdanninga i 2012 då vi tok i bruk ny nasjonal rammeplan. Når det no - etter 6 gjennomføringar - skal lagast planar for ei ny utdanning av marineingeniørar, er dette det første faget som må evaluerast og eventuelt reviderast. Er vi heldige, får vi faget med oss i den nye Sjøkrigsskolen. Måten vi har gjennomført dette faget på her på SKSK, skil seg klart ut frå andre fag her og frå gjennomføringa av dette faget på andre høyskolar. Kanskje bør dette vera eit mønster for alle fag i ingeniørutdanninga på SKSK.



Fig 1 Prosjektleveranse frå Gruppe 5 2014: «Landgangsfartøy for autonome land-droner»

## IDEEN

Frå målformuleringa i emneplanen:

«Kadetten skal lære ingeniørprofesjonen å kjenne gjennom å bli kjent med ingeniørers arbeidsråder og arbeidsmåter, og dermed bli bevisst på å se konsekvenser av ulike teknologiske løsninger»

«Offiseren skal kunne gjennomføre grunnleggende prosesser for innovasjon og nytenkning i forbindelse med prosjektarbeid, og planlegge og gjennomføre enkle ingeniørprosjekter.»

## GJENNOMFØRING

### Oppdrag

Kadettane blir delt i tverrfaglege prosjektgrupper på 6-7 personar der alle linjene er representert – Elektronikk Data, Elektro Automasjon og Maskin. Dei får som oppdrag å utvikle eit nytt sjømilitært konsept. Gruppene konkurrerer om å ha den beste løysinga på oppdraget.

Eksempel på oppdrag:

«Et autonomt overvåkningssystem bestående av en sjøgående plattform og en helikopterdrone, skal prosjekteres og demonstreres. Systemet er tenkt operert ut ifra Tromsø/Ramsund området og skal dekke havområdet nord til Spitsbergen. Helikopterdronen skal drive overvåking av hav og luftområdet.»

«Landgangsfartøy for autonome land-droner (kampkjøretøy) skal prosjekteres. Prototype i modellskala 1: 24 lages for kartlegging og demonstrasjon av egenskaper.»

«Et autonomt overvåkningssystem bestående av en liten sjøgående plattform og undervannsdroner(r) skal prosjekteres og demonstreres.»

### Teoriundervisning

Kurset starter med teoriundervisning i hydrostatikk for skipsdesign og i digitalteknikk. Dette reduserer belastninga i vidaregåande kurs i desse emna. I tillegg får dei ei innføring i prosjektarbeid. Dei blir presentert for Prinsix-modellen for prosjekt i Forsvaret. Etter kvart går dei over til praktisk prosjektarbeid i gruppene.

### Laboratoriekurs

Ingeniørar må lære seg å jobbe sjølvstendig på laboratorium. Det inngår laboratoriearbeid i fleire av dei tekniske faga på SKSK . Men det blir ofte svært styrte laboratorieoppgåver med lite tid til å bli godt kjent med laboratorietstyret. Innføringskurset skal kompensere for dette. Om lag 2 veker er sett av til laboratoriearbeid og praktisk arbeid med å designe eit skipsskrog og teste

ut elektriske og elektroniske komponentar som skal brukast i fartøyet dei skal utvikle.

### Ferdigstilling og testing av produktet

Dataprogrammet Freship blir brukt til design av fartøyet. Tverrskips profilar blir skrivne ut på A4-ark og saga ut av 50 mm hard isopor. Profilane blir limt saman til eit ca 1m langt og 20-25 cm breitt skrog. Skroget må sparklast, slipast og målast. Her er det mange praktiske utfordringar med mellom anna valg av material som



Fig 2. Gruppe 4 2013 limer skrog i Snekkerverkstad

tåler vatn og som ikkje skadar isoporen. I hovudsak er det kadettane på maskinlinja som står for dette arbeidet.

Parallelt med dette, arbeider kadettane på Elektronikk/ data- og Elektro/automasjons-linja med framdriftslinje og styresystem. Fartøya skal ha radiostyring, servo for rør, motorcontroller for trust og servo for å manipulere «våpensystem». Radiostyringa skal koplast til datamaskin slik at all styring og kontroll kan køyrast frå eit panel i eit dataprogram som dei utviklar i LabView. Dette programmet skal også kunne brukast til dynamisk posisjonering av fartøyet. Radiostyringa skal kunne erstattast med styring over Wi-Fi.

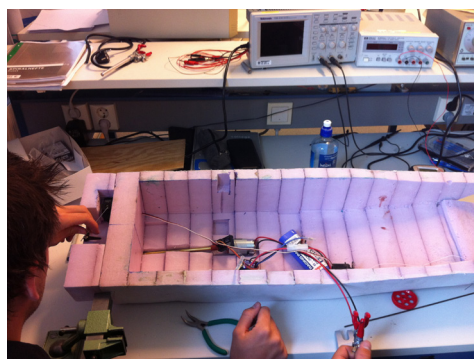


Fig. 3. Gruppe 1 2012 arbeider med framdriftslinje på Data-teknisk lab



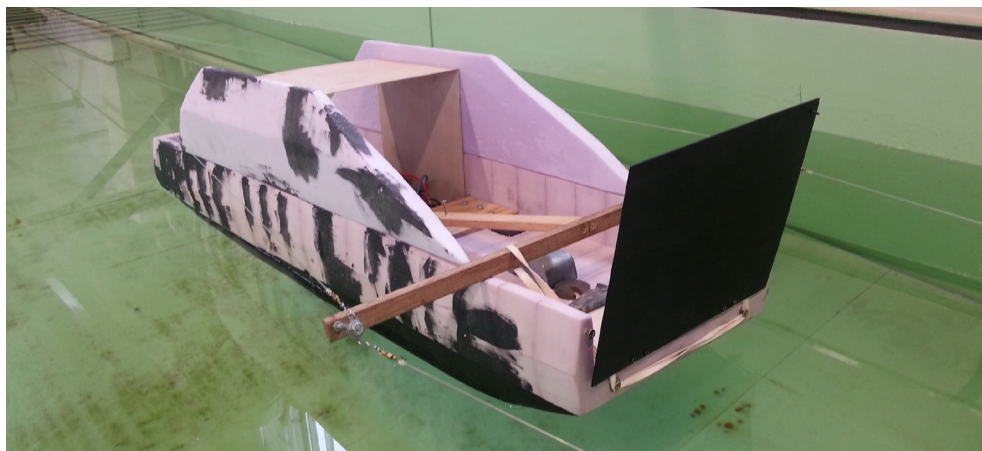


Fig. 4. Gruppe 6 2013 kører slepetest i slepetank på Maskinlab.

Underveis blir skroget testa i slepetanken på maskinlab. Det blir utført stabilitets-testar, slepetestar og testing av systemet for dynamisk posisjonering. Alle resultat skal dokumenterast i prosjektrapporten.

### Prosjektrapport

Gruppene skal levere ein prosjektrapport etter samme mal som seinare i studiet blir brukt til praktiske bachelor-oppgåver. Dei må vektlegge formellesider ved rapporten. Dei må dokumentere planlegginga og gjennomføringa av prosjektet med prosjektorganisasjon, tidsplanlegging og Work Breakdown Structure. Det ferdige produktet må dokumenterast med konstruksjonsteikningar, koplings skjema, dataprogram og testresultat. Gruppene fekk i starten utlevert ein kravspesifikasjon. Dei må vurdere om produktet oppfyller krava. Dei må levere eit budsjett og rekneskap for prosjektet som dei har gjennomført, og eit budsjett for ein simulert fullskala versjon av det utvikla produktet.

### Konkurranse

Etter ca 5 veker skal alle gruppene ha eit ferdig produkt som skal presenterast i slepetanken. Fartøymodellen skal manøvrerast i samsvar med sjøveisreglane gjennom ei hinderløype med sjømerke og trange sund. Det skal brukast både data-styring og radio/Wi-Fi – styring. «Våpensystemet» skal demonstrerast. Det kan vera lem for ilandkøyring av tanks, kran-system for å sette ut og ta inn ROV eller hangar-system for helikopter-droner. Det blir konkurrert på tid for å kome gjennom hinderløypa, med tillegg for feil-navigering. Funksjonaliteten til «våpensystemet» blir evaluert. Det er fartskonkurranse der to og to fartøy konkurrerer i «rett fram» køyring («Drag-racing»). Publikum får stemme på kven som har den mest «kreative design» og den beste «finish» på produktet sitt.

Konkurransen blir avslutta med at prosjekt-gruppene presenterer produktet sitt i stort auditorium for publikum, for styringsgruppa (lærarane på kurset) og for sensor. I mange tilfelle legg gruppene presentasjonen opp som eit salgs-møte for «interesserte kjøparar».

Video av ein del av dei ferdige produkta:

<http://www.sksk.no/Innfoering.html>

### Individuell del

I evalueringa av kurset tel karakteren på prosjektarbeidet 50 %. Karakteren på det individuelle arbeidet tel 50 %. Det blir levert individuelle rapportar på alt laboratoriearbeid. Teoristoffet i digitalteknikk og i hydrostatikk for skipsdesign blir evaluert i ein liten prøve. Alle skal levere ei individuell oppgåve der dei presenterer eit teknisk emne. Dei skal halde eit foredrag på 20 minutt inklusiv spørsmålrunde, legge ut ei nettside og levere ein liten skriftleg rapport om emnet. Dei som har erfaring frå Forsvaret, blir oppfordra til å presentere eit system som dei kjenner frå tenesta der.

Eksempel på individuelle oppgåver:

- Demonstrer Stirling-motoren og forklar virkemåten.
- Illustrere et enkelt brenselcellsystem og forklar virkemåten..
- Konstruer din egen båt i Freeship og analyser eigenskapane
- CV9030N/F1, hærens stormpanservogn
- Atomreaktor i skip
- Hyperloop:En femte form for transport, lansert av grunder E Musk
- Kryptering
- Droneteknologi og spesifikt MQ1-Predator dronen
- Power distribution på fregatt
- LTK/V Yeti og Commander

Det er obligatorisk fram møte på dei individuelle presentasjonane, og fagstoffet som blir presentert der, er ein del av innhaldet i kurset. Det er difor viktig at ein lærar med kjennskap til emnet er til stades og kan korrigere opplagte feil. Publikum er med på å evaluere kvar framføring ved å fylle ut eit evalueringsskjema etter foredraget.

### Ekskursjon og gjesteførelingar

Kvart år har kurset hatt ekskursjon til ei relevant bedrift. Vi har besøkt Fjellstrand AS og sett på bygginga av ferja Ampere. Vi har besøkt Wärtsilä Ship Design og sett på prosessen med utvikling og teikning av nye skip og testing av diesel-elektriske anlegg. Vi har besøkt Midtfjellet Vindpark og sett på vindmøller.

Kvart år har tidlegare prosjektsvarleg for fregatt-prosjektet halde gjesteføreling der han orienterer om erfaringar med prosjektarbeid i Sjøforsvaret.

Ein ingeniør skal «selja» produktet sitt. Så vi har også hatt gjesteføreling om presentasjonsteknikk i markedsføring.

### Evaluering av kurset

Etter at kurset er ferdig, skal alle gjennomføre ei datamaskinbasert evaluering av kurset. Dei skal evaluere innhald, eigen innsats og lærarane sin innsats i kvar del av kurset. I ei eiga evaluering skal dei evaluere kurset som heilhet. På ein skala frå 1 til 5 gir dei karakter rundt 4 på at «Det praktiske prosjektarbeidet var lærerikt», «Min interesse for faget er stor», «Jeg regner med å ha god nytte av faget i det vidare studium», «Jeg oppfatter mitt arbeid med faget som godt», «Faget virker motiverende for det vidare studium» og «Totalinntrykket av faget er positivt».

Det kjem også enkelte negative tilbakemeldingar på ein del av kursinnhaldet og undervisninga. Dette er det første kurset i utdanninga til kadetten som fjernar seg frå skolemodellen med tradisjonell klasseromsundervisning. Det er mykje sjølvstudium og elevane må ofte sjølv ta kontakt med lærar for å få informasjon eller veiledning. I emneplanen står det under Læringsutbytte/Generell kompetanse etter kurset: «Offiseren er i stand til å organisere, planlegge og gjennomføre sin studietid, både individuelt og i samarbeid med andre» Det kan vera ein tøff overgang å gå frå skole til høgskole. Dette er eit innførings-kurs som skal ta kadettane med på denne overgangen.

Lærarane som har undervist i faget, har også gitt uttrykk for at dette kurset kunne vise veg for andre fag for å gjere faga og undervisningsmetodane meir relevante for Forsvaret.

På den andre sida burde vi ha knytta arbeidet med dette faget meir opp mot andre fag på skolen. Vi har lagt stor vekt på praktisk team-arbeid, vi har vore innom teori for

prosjektarbeid, vi har økonomi og navigasjon som tema. I innleiinga til kurset refererer vi til den internasjonale situasjonen og forsvaret av nordområda. Dette er tema som inngår i faga på dei andre avdelingane.

Det var eit problem at kurset har gått i 0. klasse. Teamarbeidet i dette kurset kunne vore ein del av leiarutdanninga ved Sjøkrigsskolen, men kadettane var ikkje komne i gang med denne utdanninga. 0.-klassane har stort sett berre hatt eldre kadettar som veileadarar dette semestret og har hatt lite kontakt med dei som seinare skal undervise i leiarskap. Dersom kurset overlever Utdanningsreformen, vil det koma inn seinare i studiet og med muligheter til større integrering med andre fag. Vi kan då gjera dette faget enda meir relevant for Sjøforsvaret.

Ei arbeidsgruppe kom i desember 2016 med skisse til eit nytt innføringskurs, <http://www.sksk.no/EmneplanNyttInnf%C3%B8ringsfag.pdf>, som eit fellesfag for alle kadettar på SKSK. Kanskje kan vi ta fram igjen denne skissa når planane skal lagast for den nye Sjøkrigsskolen.

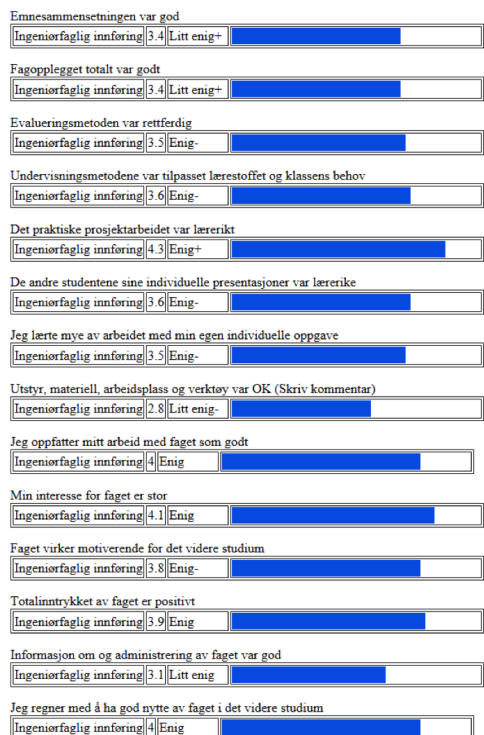


Fig 5. Evalueringresultat av faget Ingeniørfaglig innføring 2017





---

# DEL 2

Artikler basert på  
bacheloroppgaver

---



# Forfatterne



Vegard Bratberg, 29 år.

Kontaktperson artikkel:  
bratbergv@gmail.com

Artikkel: Styrkeberegning av en fremtidig undervannsfarkost.

Studerte lederskap med fordypning i maskinfag ved SKSK, uteksaminert i 2017. Tjenestegjør nå som maskinist i ubåtvåpenet.



Stian Valand, 29 år.

Kontaktperson artikkel:  
bratbergv@gmail.com

Artikkel: Styrkeberegning av en fremtidig undervannsfarkost.

Studerte lederskap med fordypning i maskinfag ved SKSK, uteksaminert i 2017. Tjenestegjør nå som maskinist i ubåtvåpenet.



Espen Dragset, 25 år.

Kontaktperson artikkel:  
espen.dragset@gmail.com

Artikkel: Automatisert Rubiks kube.

Studerte lederskap med fordypning i elektronikk og data ved SKSK, uteksaminert i 2017. Tjenestegjør nå som våpentekniker i ubåtvåpenet.



Leif Martin Jensen, 24 år.

Kontaktperson artikkel:  
espen.dragset@gmail.com

Artikkel: Automatisert Rubiks kube.

Studerte lederskap med fordypning i elektronikk og data ved SKSK, uteksaminert i 2017. Tjenestegjør nå som våpentekniker i ubåtvåpenet.



Bjarte Abrahamsen, 24 år.

Kontaktperson artikkel:  
espen.dragset@gmail.com

Artikkel: Automatisert Rubiks kube.

Studerte lederskap med fordypning i elektronikk og data ved SKSK, uteksaminert i 2017. Studerer nå ved Norges Handelshøyskole.



Helene Sundby Brennesvik, 27 år.

hsbvik@gmail.com

Artikkel: Måling av fartøys elektriske signatur og miljømessige påvirkninger.

Fagbrev som automatiker. Studerte lederskap med fordypning i elektro og automasjon ved SKSK, uteksaminert i 2016. Tjenestegjør nå som elektrooffiser i ubåtvåpenet.

---

# Automatisert Rubiks kube

Tekst: Bjarne Abrahamsen, Espen Dragset og Leif Martin Jensen

Artikkelen tar for seg hvordan vi løste vår bacheloroppgave ved linjen marineingeniør elektronikk og data. Oppgaven gikk ut på å bygge en robot som kunne løse en Rubiks kube.

*Denne artikkelen er et sammendrag av bacheloroppgaven.  
Oppgaven er ikke tilgjengelig i biblioteksystemet.*

---

## INNLEDNING

Vår problemstilling var å lage en robot som kunne løse en Rubiks kube. Denne skulle ta utgangspunkt i å løse kuben på lik måte som de fleste mennesker gjør det. Målet var at roboten skulle prestere bedre enn vi selv var kapable til. Oppgaven har utfordret oss på flere fagområder, med hovedvekt på datateknikk, datasystemer og datamodellering. I tillegg inneholder oppgaven elementer fra elektroteknikk og matematikk. Hensikten med oppgaven var å utfordre oss selv innenfor relevante fagområder og samtidig gi en økt forståelse av samvirket i et system bestående av sensorer, software og elektroniske komponenter.

## KONSEPTET

Hovedkonseptet for roboten er en rigg bestående av seks motorer. Disse er direkte koblet inn på en Rubiks kube og kan utføre alle nødvendige trekk på kuben. Ved hjelp av seks webkameraer kan roboten gjenkjenne hvordan kubenser ut. Denne informasjonen sendes til en algoritme vi har skrevet selv, som produserer en løsning. Denne løsningen blir så utført av motorene. Programmet som gjenkjenner farger og regner ut løsningene, kjøres på en bærbar PC som er koblet til riggen. Motorene i riggen drives av en Arduino mikrokontroller.

For enklere å kunne vurdere vår måloppnåelse i oppgaven, satte vi oss følgende suksesskriterier:

- Roboten kan registrere hvordan kuben ser ut (hvilke farger er hvor).
- Roboten kan fysisk bevege kuben (utføre trekk).
- Roboten skal kunne produsere en løsning fra en hvilken som helst tilfeldig tilstand, ved hjelp av egenskrevet algoritme.
- Roboten kan løse kuben raskere enn hva vi selv klarer for hånd.
- Roboten kan løse en vilkårlig (hvilken som helst) 3x3x3 Rubiks kube.

## TEORI

### Rubiks kube

Hvor mange forskjellige tilstander kan en Rubiks kube ha?

$$\frac{((8!) \times 3^8) * ((12!) \times (2^{12}))}{12} = 43,252,003,274,489,856,000$$

Regnestykket tar utgangspunkt i antall forskjellige brikker av hver type (8 hjørnebrikker, 12 sidebrikker). Deretter multipliseres dette med antall forskjellige veier hver av disse brikkene kan plasseres på kuben, opphøyd

i antall brikker av den aktuelle typen. Vi dividerer til slutt med 12 for å kompensere for de 12 forskjellige typene endringer vi kan gjøre som vil føre til at kublen blir uløselig. Med  $4.3 \times 10^{19}$  forskjellige tilstander og kun én løsning, ville det være praktisk umulig å lage en tabell med forskjellige løsninger for hver enkelt tilstand. Vi benytter oss derfor av en egenskrevet algoritme som produserer en løsning uansett hvilken tilstand kublen befinner seg i.

Algoritmen som benyttes i sluttproduktet, baserer seg på en algoritme man kan bruke for hånd, denne heter Fridrich-algoritmen. Algoritmen baserer seg på et prinsipp hvor kublen løses fra en side og lagvis oppover til motsatt side, men er noe mer avansert enn nybegynner-metodene som de fleste mennesker bruker.

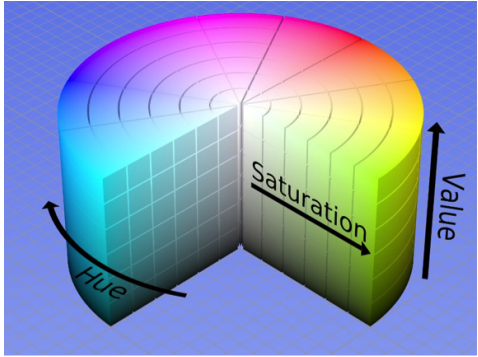
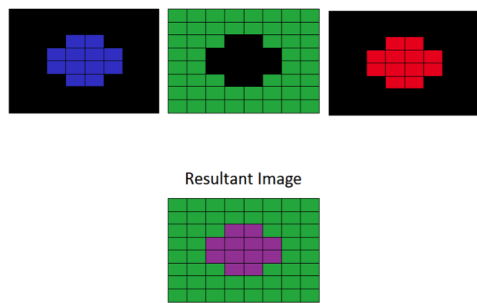
### Fargegjenkjenning

Fargegjenkjenning er et veldig vidt begrep som tar for seg mange aspekter rundt «datamaskinens syn» og digital bildebehandling. I vår oppgave vil vi i all hovedsak se på stillbilder og hvordan vi kan prosessere disse for å hente ut informasjonen vi trenger.

I sluttproduktet har vi benyttet oss av OpenCV. Dette er et program som opprinnelig ble laget av Intel, det inneholder flere funksjoner som utnytter kameraets kapasiteter på forskjellige måter. OpenCV har nå åpen kildekode og er best tilpasset C++.

Når en datamaskin tar bilder med et kamera, lagres bildet som tre verdier i matriser, stedet i matrisen tilsvarer posisjonen. Grunnen til at hver pixel har tre verdier, er at bildet har 8-bits RGB/BGR-format, hvor henholdsvis rød, grønn og blå har én verdi hver (Bradski og Kaehler, 2008). Dette illustreres i bildet nedenfor. Til sammenligning har svart/hvitt bilde kun én verdi i én matrise.

Blue matrix	Green matrix	Red matrix
0 0 0 0 0 0 0 0 0	255 255 255 255 255 255 255 255	0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0	255 255 255 255 255 255 255 255	0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 255 255 0 0 0 0	255 255 255 0 0 255 255 255	0 0 0 255 255 0 0 0
0 0 255 255 255 255 0 0 0	255 255 0 0 0 0 255 255	0 0 255 255 255 255 0 0
0 0 255 255 255 255 0 0 0	255 255 0 0 0 0 255 255	0 0 255 255 255 255 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0	255 255 255 255 255 255 255 255	0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0	255 255 255 255 255 255 255 255	0 0 0 0 0 0 0 0



HSV, som står for hue, saturation og value, er et alternativt fargeformat til RGB (Red green blue). HSV benytter andre verdier for å gjengi samme farger som RGB gjør, men er for alle praktiske formål kun et annet "språk" for å beskrive fargene i et bilde. I figuren ovenfor ser vi hvordan verdiene til hue, saturation og value bestemmes ut ifra hvilken farge som vises.

### IMPLEMENTERING

Implementeringen tar for seg hvordan den faktiske løsningen ble utviklet og realisert. I denne teksten vil vi først og fremst fokusere på løsningen som den ble til slutt. I den komplette oppgaven kan du lese mer om alternativene som ble vurdert.

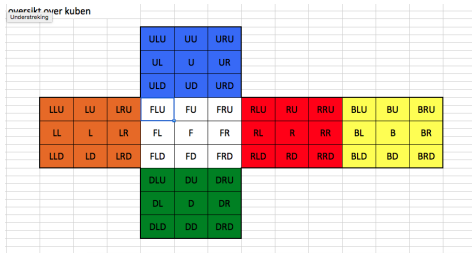
### Algoritme

Vi valgte å skrive algoritmen i språket C++, da dette er det språket vi kjenner best fra undervisningen ved SKSK. Vi ønsket også at fokuset skulle ligge på utviklingen av algoritmen, og ikke forståelsen av et nytt språk. C++ var mer enn tilstrekkelig for oppgaven, og vi har i all hovedsak benyttet den kunnskapen vi har ervervet oss gjennom utdanningsløpet ved skolen.

I starten av arbeidet med algoritmen tok vi noen fundamentale valg. Ett av disse valgene er at algoritmen skal løse kublen fra grønn side og lagvis oppover til blå side. Bakgrunnen for dette valget var at vi ikke var kjent med omfanget av det å skrive en algoritme selv. Dette gjorde startfasen enklere og førte til større fremgang i arbeidet på et tidlig tidspunkt i prosjektet.

Det første spørsmålet som møtte oss når vi skulle begynne arbeidet var: hva må algoritmen kunne gjøre? I all enkelhet kan vi si at algoritmen må kunne gjøre 3 ting:

- Fremstille kublen digitalt.
- Kjenne sammenhengen mellom fargene på kublen når den roteres.
- Kunne produsere en løsning, uansett hvilken tilstand kublen befinner seg i.



```

1 //headerfil
2 #include <string>
3 using namespace std;
4
5 class Firkant{
6 public:
7     Firkant();
8     Firkant(string nyFarge);
9
10    void settFarge(string nyFarge);
11    string finnFarge();
12 private:
13    string farge;
14 };

```

Firkantklassen deklarerer et objekt for hver av de 54 ensfargede firkantene på kubene

Algoritmen består i hovedsak av tre grunnleggende elementer. Dette er firkant-klassen, rotasjonssammenhengene og løsningsalgoritmene. Disse er realiseringen av de tre hovedpunktene som beskrev hva algoritmen måtte kunne gjøre.

Firkant-klassen deklarerer et objekt for hver av de 54 ensfargede firkantene på kubene. Objektene blir så navngitt etter deres plassering på kubene. Eksempelvis vil objektet øverst til høyre på den blå siden i figuren ha

navnet URU fordi den tilhører siden Up, er plassert på Right-kolonne av denne siden og er plassert i UP delen av Right-kolonnen.

Rotasjonssammenhengene forklarer sammenhengen mellom objektene når det utføres trekk på kubene. Dette vil i all enkelhet si at rotasjonssammenhengene er bygget opp som en matrise som inneholder hvilke objekter som påvirkes av hvert trekk og hvordan fargene forflytter seg mellom objektene for hvert enkelt trekk.

RIGHT rotasjon				RIGHT-INVERTED rotasjon			
Innvolverte firkanter				Innvolverte firkanter			
URD	UR	URU		URD	UR	URU	
FRU	BLU	RU	RRU	FRU	RLU	RU	RRU
FR	BL	R	RR	FR	RL	R	RR
FRD	BLD	RD	RRD	FRD	RLD	RD	RRD
	DRU	DR	DRD		DRU	DR	DRD

SAMMENHENG			SAMMENHENG		
INIT VERDI		END VERDI	INIT VERDI		END VERDI
RLU	→	RLD			
RU	→	RL			
RRU	→	RLU			
RL	→	RD			
R	→	R			
RR	→	RU			
RLD	→	RRD			
RD	→	RR			
RRD	→	RRU			
FRU	→	DRU			
FR	→	DR			
FRD	→	DRD			
URD	→	FRD			
UR	→	FR			
URU	→	FRU			
BLU	→	URD			
BL	→	UR			
BLD	→	URU			
DRU	→	BLD			
DR	→	BL			
DRD	→	BLU			

```

//Sammenheng mellom fargene ved rotasjon av kubene--
void Right(Firkant &urd,Firkant &ur,Firkant &uru,Firk
{
    string A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U;

    A=rl.d.finnFarge();
    B=rl.finnFarge();
    C=ru.finnFarge();
    D=r.finnFarge();
    E=r.finnFarge();
    F=ru.finnFarge();
    G=rd.finnFarge();
    H=r.finnFarge();
    I=rr.finnFarge();

    J=ru.finnFarge();
    K=dr.finnFarge();
    L=rd.finnFarge();
    M=frd.finnFarge();

    N=fr.finnFarge();
    O=fru.finnFarge();
    P=urd.finnFarge();
    Q=ur.finnFarge();

    R=uru.finnFarge();
    S=bl.d.finnFarge();
    T=bl.finnFarge();
    U=blu.finnFarge();

    ru.settFarge(A);
    ru.settFarge(B);
    ru.settFarge(C);
    r.settFarge(D);
    r.settFarge(E);
    ru.settFarge(F);
    rd.settFarge(G);
    rd.settFarge(H);
    rd.settFarge(I);

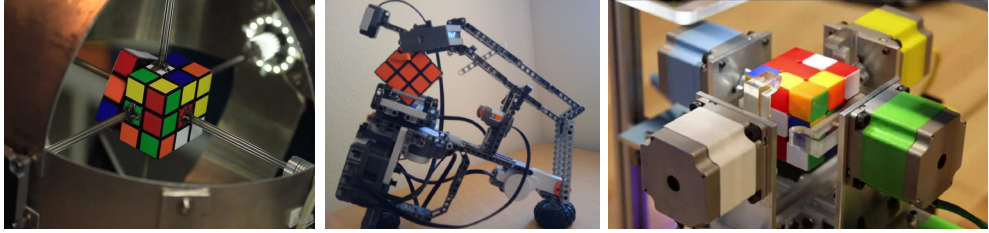
    J=ru.finnFarge();
    ur.settFarge(J);
    ur.settFarge(K);
    ur.settFarge(L);
    ur.settFarge(M);

    uru.settFarge(N);
    uru.settFarge(O);
    bl.settFarge(P);
    bl.settFarge(Q);

    bl.d.settFarge(R);
    dru.settFarge(R);
    dru.settFarge(S);
    dr.settFarge(T);
    dr.settFarge(U);
}

```

Figuren viser hvordan kubene påvirkes av en Right rotasjon.



Løsningsalgoritmene som ble implementert i sluttproduktet baserer seg på en løsningsmetode man kan benytte for hånd, denne heter "Fridrich-algoritmen". Denne algoritmen begynner med å løse én side av kubens lag. Dette sees på som "bunnen" av kubens lag etter den er løst. Deretter løser den de 2 nederste lagene. Til slutt orienterer den alle brikkene i det øverste laget riktig vei, før den setter dem på riktig plass.

Løsningsalgoritmen ble implementert på en slik måte at algoritmen i seg selv består av mange linjer med kode. Fordelen er at programmet kun trenger å lese et fåtall av disse linjene for hver løsning den skal produsere. I praksis betyr dette at det tar lang tid å skrive algoritmen, men at den er svært rask når den kjører.

### Konstruksjon

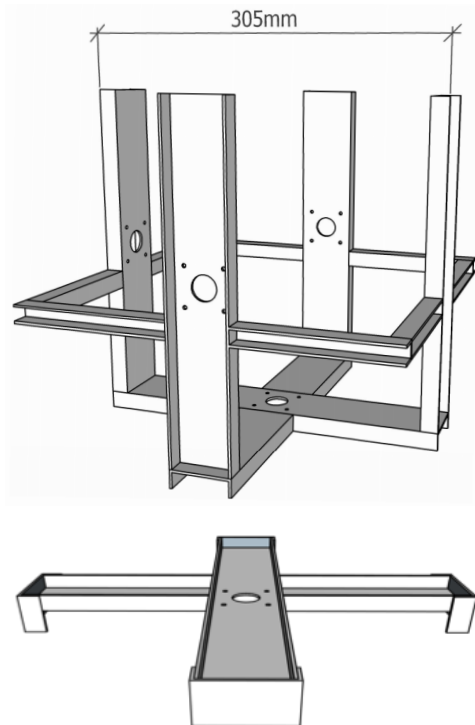
Av flere forskjellige konsepter for konstruksjonen landet vi til slutt på en konstruksjon med direkte akslinger koblet inn på kubens senterbrikker. En slik konstruksjon vises til venstre i bildet ovenfor.

Senterbrikkene på kubens lag vil aldri skifte posisjon, relativt til hverandre. Dette tillater oss derfor å koble akslinger inn på senterbrikkene på hver side og fortsatt kunne utføre alle mulige trekk. Fordelene med en slik konstruksjon er blant annet at dette er ett av de raskeste alternativene. Selve konstruksjonen er mindre kompleks enn noen av de andre alternativene. Noen av ulempene er at den ikke er like kompatibel med alle typer 3x3x3 kuber.

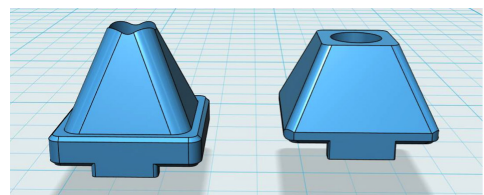
Valget av konstruksjonstype bestemte i stor grad valget av motorer. Vi valgte steppermotorer fra Adafruit. Disse tilfredsstilte karakteristikkene vi ønsket av en motor. Vi hadde behov for en rask og presis motor. Steppermotoren gir oss nettopp dette. Ulempen med et slikt motorvalg er at den mangler tilbakemelding på posisjonen, hvilket en servomotor eksempelvis har. Dette valget var med på å senke robustheten til det totale systemet.

Konstruksjon av selve rammen ble igjen påvirket av hvilken konstruksjonstype og motortype vi hadde valgt. Her ble det tegnet en ramme i to deler, slik at toppen kunne tas av og på med enkelhet. Dette for å kunne ta kubens lag inn og ut av riggen. Det ble lagt inn hull til

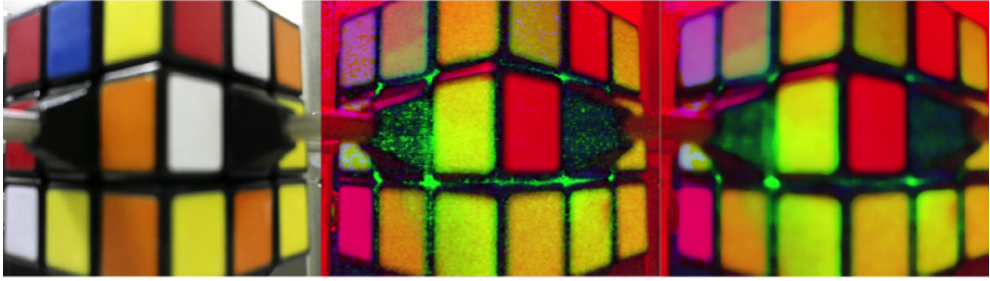
motorene, slik at disse kunne monteres vinkelrett på hver sin side av kubens lag. Noen av disse ble også fjærbelastet, slik at kubens lag skulle bli enklere å ta inn og ut.



Gripemekanismene som skulle kobles inn på senterbrikkene ble 3D-printet for å passe den varianten av 3x3x3 kubens lag som vi benyttet i riggen.







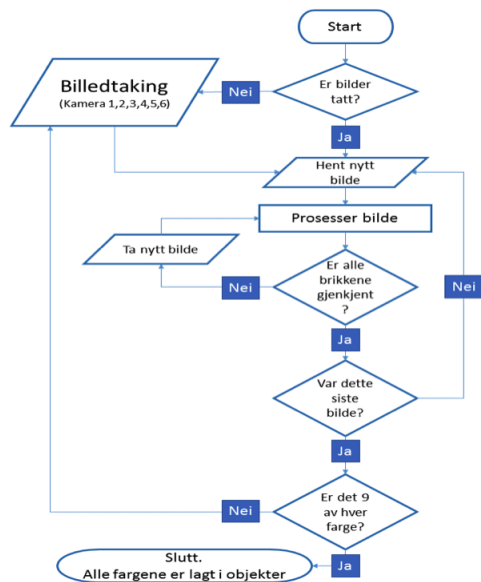
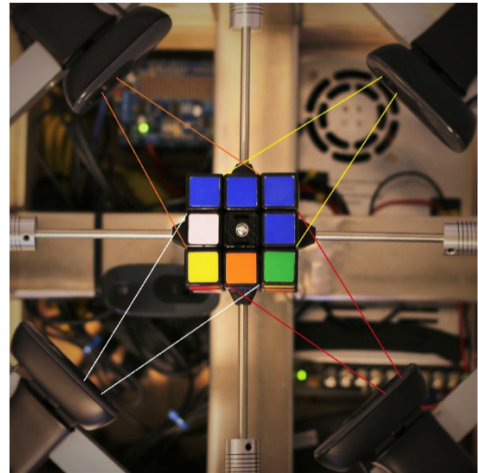
### Fargegjenkjenning

Fargegjenkjenningens oppgave er kort fortalt å overføre bildet vi ser, til et format datamaskinen klarer å lese. Deretter skille mellom fargene og videreformidle disse slik at informasjonen om hvilken tilstand kubene befinner seg i, kan brukes i algoritmen. For å forenkle og oppsummere kort: Det første vi gjør å hente opp ett bilde. Bildet flyttes så over i HSV fargerommet. Til sammenligning er det RGB fargerommet vi vanligvis refererer til, og som bildet blir tatt med. HSV fargerommet gjør det enklere for datamaskinen å skille mellom fargene. Videre legges det inn begrensninger i HSV fargerommet, slik at fargene som befinner seg innenfor begrensningene, vises. Legger vi eksempelvis inn verdiene for grønn, er det kun de pixlene på bildet som inneholder grønt vi får se. Dette gir oss muligheten til å skille mellom fargene, og å definere en brikke dersom samlingen av en farge på bildet er stor nok. Når vi har gjort dette for alle fargene på et bilde, skal vi forhåpentligvis stå igjen med alle brikkene vi trenger. Stemmer dette, gjentar vi prosessen på de neste bildene, helt til vi står med en ferdig gjenkjent Rubiks kube. Stemmer dette derimot ikke, tas nytt bilde og prosessen gjentas.

Sluttproduktet benytter 6 webkameraer fra Logitech, disse tar stillbilder fra forskjellige sider av kubene. Bildene konverteres og prosesseres ved hjelp av funksjoner i OpenCV.

På bildet ovenfor ser vi noe av det som skjer i prosesseringen av bildet. Fargerommet endres fra BRG til HSV før det legges til et median blur filter. Filteret har til hensikt å skille områdene og gjøre det enklere for programmet å skille brikkene. Fire av kameraene er plassert slik at to og to overlapper i synsvinkler inn på kubene. Dette gir oss muligheten til å sjekke noen brikker to ganger fra forskjellige vinkler. Dette er utvilsomt med på å gjøre fargegjenkjenningen mer robust.

Når alle bildene har blitt prosesserte, sjekker programmet om det har funnet 9 brikker av hver farge. Hvis ikke kjøres prosessen på nytt. Til høyre vises flytskjemaet for fargegjenkjenningen.





## TESTING OG MÅLOPPNÅELSE

Da dette er en oppgave som ligner mest på en eksperimentell oppgave, må mange av konklusjonene gjøres på bakgrunn av tester som har til hensikt å måle hvorvidt sluttproduktet oppfyller suksesskriteriene. De testene vi gjennomførte, gav følgende resultater:

### Test: Antall trekk per løsning

- Det ble utført forsøk hvor vi løste kubene for hånd 60 ganger. Dette gav oss en referansetid å slå på 2 minutter og 24 sekunder.
- Med den valgte trekktypen kan motorene kjøre 5 trekk per sekund. Dette gav oss et tak på 720 trekk per løsning
- Gjennom forsøk hvor antall trekk ble behandlet som en stokastisk variabel, endte løsningen opp med et forventet antall trekk på 115, med et standardavvik på 16 trekk.

### Test: spesielle tilstander

- Algoritmen ble utsatt for en rekke spesielle tilstander. Noen av disse var kun én av sidene rotert fra løst tilstand. Superflip, tilstanden som er teoretisk lengst fra løst tilstand. Uløselig kube, en som ikke kan løses uten å demontere kubene.
- Algoritmen responderte godt på de fleste tilstandene hvor kun én side er rotert. Av de 19 forskjellige tilfellene hvor kun én side er rotert, vil den i 3 av disse produsere det som for et menneske ville fremstå som en ulogisk løsning. Eksempelvis lager algoritmen en løsning på 123 trekk, hvor de fleste mennesker ville brukt 1 trekk.
- Teoretisk vanskeligste tilstand blir løst på 116 trekk. Dette ligger på algoritmens snitt og er et godt resultat.
- En uløselig kube vil bli forsøkt løst, men resultatet vil være en ny uløst kube.

### Test: Dreiemoment

- Kubene vi testet krevde et dreiemoment på ca 0.025 Nm.
- Steppermotorene leverer et dreiemoment på 10N, altså mer enn tilstrekkelig kraft.

### Test: Feilrate

- Konstruksjonen forventes å kjøre mer enn 385 trekk før det oppstår mekanisk feil i konstruksjonen.
- 10% av alle gjennomføringer ender med mekanisk feil. Kuben vil da forbli uløst.

### Test: Forskjellige Rubiks kuber

- Konstruksjonstypen vi valgte, umuliggjør 100% måloppnåelse.
- Rigger en tilpasset en hvilken som helst kube av typen "Rubiks speed cube".
- Bytte av kube vil ha stor innvirkning på feilraten til systemet.

### Test: fargegjenkjenning

- Roboten klarer å gjenkjenne kubene.
- Lysforholdene påvirker i stor grad hvor lang tid fargegjenkjenningen vil ta.
- Forventet tid for fargegjenkjenning er 7.78 sekunder. Standardavviket er på 2.32 sekunder.

### Test: Referansetid

- Referansetiden som systemet måtte slå, var på 2 minutter og 24 sekunder.
- Systemets forventede totaltid ligger på  $31 \pm 4$  sekunder.

### Test: Feilrate

- I forsøk hvor systemet ble testet som helhet, ble det avdekket kritisk feil i 18% av gjennomføringene. Kritisk feil er tilfeller hvor kubene forblir uløst.
- Sett i lys av tidligere estimater for feilrate, vil vi på bakgrunn av dette estimere at feilraten til systemet ligger mellom 10-20%.

### Test: systemets svakeste punkt

- Fargegjenkjenningen er den delen av systemet hvor det oftest oppstår feil. Denne har dog innebygde mekanismer for utbedring av feilen.
- Mekanisk (konstruksjon) er den delen av systemet som oftest opplever kritisk feil.
- Systemets svakeste punkt er den mekaniske (utførelse av trekk).

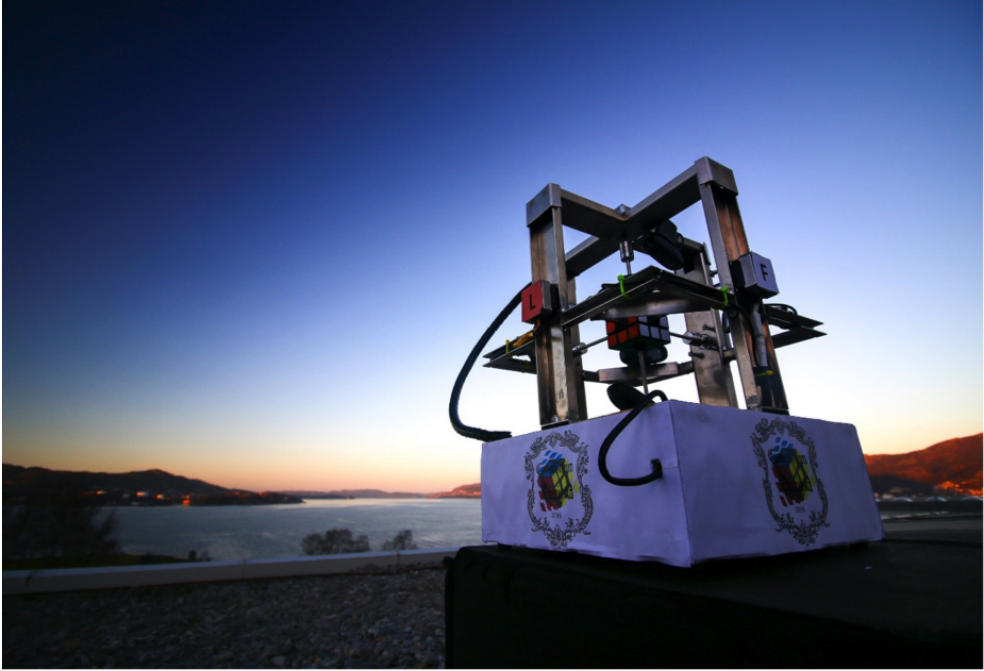
## KONKLUSJON

Med bakgrunn i kapittelet om testing og måloppnåelse har vi forsøkt å utmåle i hvilken grad vi har innfridd suksesskriteriene. Vi har rangert oppnåelsen på følgende måte:

- Ingen måloppnåelse
- Lav måloppnåelse
- Delvis måloppnåelse
- Høy måloppnåelse
- 100% måloppnåelse

SUKSESSKITERIUM	GRAD AV MÅLOPPNÅELSE
Roboten kan registrere hvordan kubene ser ut (hvilke farger er hvor)	Høy
Roboten kan fysisk bevege kubene (utføre trekk)	Høy
Roboten skal kunne produsere en løsning fra en hvilken som helst gitt tilstand, ved hjelp av egenskrevet algoritme	100%
Roboten kan løse kubene raskere enn hva vi selv klarer for hånd	100%
Roboten kan løse en vilkårlig (hvilken som helst) 3x3x3 Rubiks kube.	Lav

Tabell 1 - Måloppnåelse



*Den komplette riggen*

Ut ifra graden av måloppnåelse vi hatt på suksesskriteriene, vil vi konkludere med at oppgaven har vært en suksess. Vi har klart å bygge en robot som løser en Rubiks kube raskere enn hva vi selv klarer med lik fremgangsmåte. Systemets deler fungerer hver for seg og som en helhet. Systemet kan fortsatt forbedres, men vi anser oppgaven som en suksess.

---

# Måling av fartøys elektriske signatur og miljømessige påvirkninger

Bacheloroppgave i elektro og automasjon

Tekst: Helene Sundby Brennesvik

Elektrisk signatur, også kjent som UEP, er et elektrisk felt alle fartøy genererer i sjøen rundt seg. Dette feltet kan måles og i teorien skal måledataene kunne brukes til å si noe om hvilket fartøy det er som detekteres. Dette viser seg å være vanskelig siden den elektriske signaturen fra et fartøy er forskjellig ut i fra hvor det befinner seg. Denne oppgaven beskriver hvilke miljømessige faktorer som skaper disse forskjellene og hvordan de vil endre signaturen.

*Denne artikkelen er en lett redigert utgave av den originale bacheloroppgaven. Originalen er tilgjengelig på <https://brage.bibsys.no/xmlui/handle/11250/2406184>*

---

## INTRODUKSJON

### Sammendrag

Elektrisk signatur er det elektriske feltet et fartøy genererer rundt seg på grunn av de galvaniske egenskapene til metallene det er bygget av. Et elektrisk felt kan ikke måles, på lik linje med et gravitasjonsfelt, men man kan måle virkningen det har på omgivelsene. Denne oppgaven ser på hvordan man måler elektrisk signatur ved bruk av sølv-sølvklorid-elektroder som er følsomme ovenfor ionestrømmen i havet.

De vanligste sjømilitære bruksområdene for måling av elektrisk signatur i dag er i detoneringsmekanismen til sjø-miner, og målestasjoner der man måler den elektriske signaturen til et fartøy og gjør tiltak for å redusere den.

Den elektriske signaturen til et fartøy vil påvirkes av miljømessige faktorer som polarisering, måleddybde, fartøys dyptgående, vannets og havbunnens konduktivitet. Disse faktorene påvirker signaturen i så stor grad at det ikke vil være hensiktsmessig å bruke måling av elektrisk signatur alene til kjenningstjeneste av fartøy. Det vil derimot kunne være et brukbart element i et større målesystem som benytter flere måledata sammen.

### Bakgrunn

Hvert fartøy skal i teorien ha en egen unik elektrisk signatur. Materialene det er bygget av og utformingen det har, skal skape en unik signatur. Den kan måles og brukes til å identifisere ikke bare hvilken fartøystype det er, men også spesifikt hvilket skrog. For å bruke den målte elektriske signaturen til kjenning av et fartøy må man ha tidligere målinger fra samme fartøy, for å kunne si om det er det samme fartøyet man detekterer.

Dette kan brukes i flere militære sammenhenger, som for eksempel utløsning av miner, overvåkning og mål-opdagelse. Tidlig oppdagelse av et fiendtlig fartøy, dets posisjon, retning, operasjonsmønster og fart kan være meget kritisk. Hva hvis vi hadde hatt et sikkert system for dette i Oslofjorden 9. april 1940?

Det er et mål for alle militære fartøy at denne signaturen skal være minst mulig, for å minimere muligheten for selv å bli detektert. Det ideelle hadde vært å eliminere signaturen helt. Det er ikke funnet noen løsning på det enda, siden den elektriske signaturen bestemmes av flere komplekse faktorer. Derimot finnes det enkelte mottiltak man kan bruke.

Elektrisk signatur er en måte å oppdage om det er skipsaktivitet i farvannet. Det kan ikke brukes til å si med sikkerhet hvilket fartøy det er, hvilken hastighet det går med, hvilken dybde det er på, eller hvor stor trussel det vil utgjøre med tanke på stridsmidler og mannskapet det frakter. Dette krever mer data enn bare måling av det elektriske potensialet alene.

Det finnes flere målestasjoner rundt om i verden for å måle signaturen til fartøy. Det som da er spesielt, er at måleresultatene for ett og samme fartøy varierer i stor grad når det måles på forskjellige målestasjoner ved bruk samme målemetode.

Ubåter er spesielt interessante i forhold til signaturmåling, siden de er svært vanskelige (og over mot umulig) å oppdage fra overflaten, og evnen til å detektere og gjenkjenne dem ved hjelp av elektrisk signatur er langt mer relevant. Derfor vil ubåt være eksempelartoyet det refereres til i eksemplene i denne oppgaven.

Forslag til tema for oppgaven kom fra Stein Erik N. Fredriksen, orlogskaptein og teknisk saksbehandler i FLO MARKAP våpen- og sensorteknikk avdeling.

### Problemstilling

Denne oppgaven forteller om hva elektrisk signatur er, hvordan den kan måles og beregnes ved hjelp av elektroder. Oppgaven forteller om hvordan man benytter seg av måling av elektrisk signatur i dag og hvordan det kan være nyttig å bruke det i forskjellige andre militære sammenhenger i fremtiden. Den forteller om mulighetene digitale verktøy gir for å beregne og visualisere den elektriske signaturen, og for å gjøre digitale eksperimenter som vil være tids- og ressurskrevende å utføre med virkelige båter og målinger.

Den forteller om forskjellige miljømessige faktorer som har innvirkning på den målte elektriske signaturen, hvordan og hvorfor de vil påvirke den.

For å kunne forstå flere av de temaene oppgaven tar for seg, er det nødvendig med en del forkunnskaper innen måleteknikk, matematikk, systemtenkning, elektrofysikk og kjemi. Derfor vil oppgaven inneholde et eget delkapittel med definisjoner og forklaringer av det som ikke har vært del av, eller er lite vektlagt, i undervisningen ved elektro- og automasjonsutdanningen ved Sjøkrigsskolen (heretter SKSK).

Det er et eget kapittel i oppgaven som handler om fremgangsmåte, det er for å gjøre oppgaven reproducerbar og vise til prøvbarheten av det som er skrevet. Til sist i oppgaven er det satt opp kildeliste.

### Definisjoner

Dette delkapittelet inneholder forklaring av indekser, forkortelser og uttrykk. De definisjonene som er tatt med

her, er lagt lite fokus på eller ikke tatt med i undervisningen ved elektro- og automasjonsutdanningen ved SKSK. Dette delkapittelet er til for at leseren enkelt skal kunne finne frem til definisjoner som er viktig for å forstå innholdet i oppgaven.

### Indekser:

$\phi_e$ , Elektrisk fluks

Mengden av elektrisk felt som går gjennom en flate.

Fluks eller flux kommer fra latin og betyr gjennomstrømming. Selv om feltet ikke renner eller strømmer på samme måte som væsker, er det en god metafor for billedliggjøring av hvordan feltlinjene brer seg ut i rommet. (Knight, 2014)

$\epsilon$ , Permittivitet:

En utledet SI-enhet som angir motstanden som oppstår når et elektrisk felt ledes i en materie. Permittivitet er målenheten for en av materialegenskapene til isolerende stoffer. Tidligere ble det kalt dielektrisitetetskonstanten.  $\epsilon$  oppgis i Farad per meter [ $F/m$ ], er utledet fra formelen for kapasitans ( $C = \epsilon \frac{A}{d}$ ) der  $\epsilon$  er produktet av:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

$\epsilon_0$  er en fysikalsk konstant for permittiviteten i vakuum, den oppgis som 8,854187817...E-12 F/m.

$\epsilon_r$  er den relative permittiviteten og er forskjellig for ulike stoffer. Den uttrykker hvor mye kapasitansen i en kondensator fylt med stoffet øker, i forhold til vakuum. Den oppgis uten dimensjon. Den relative permittiviteten er nær konstant for de fleste stoffer, men kan være frekvensavhengig for noen. Det finnes stoffer som oppviser ulineære permittiviteter slik at verdien er en funksjon av feltstyrken. (wikipedia.org, 2016)

Den relative permittiviteten for sjøvann er satt til å være 1.

### Forkortelser og uttrykk

- *UEP, Under Water Electric potential:*  
Elektrisk potensiale målt under vann.
- *Fritt vannsmodellen*  
En teoretisk modell der en ubåt er omgitt av sjøvann på alle kanter i uendelig utstrekning og sjøvannet har en homogen konduktivitet.
- *FLO MARKAP*  
Forsvarets logistikkorganisasjon, Maritime kapasiteter.
- *SKSK*  
Sjøkrigsskolen
- *Elektrolytt*  
Væske som leder strøm i form av ionestrøm.
- *Faradaybur*  
En konstruksjon som isolerer for elektriske felt og potensialforskjeller mellom utsiden og innsiden. Konstruksjonen er elektrisk ledende og omkapsler et volum.

### Fremgangsmåte

Denne oppgaven er i hovedsak en dokumentanalyse.

Det vil si en teoretisk analyse gjort på grunnlag av litteraturstudier.

Dette kapittelet forteller om fremgangsmåten som er brukt for å produsere oppgaven. Det er for at oppgaven skal være reproducerbar og for å vise prøvbarheten av innholdet i den.

#### Valg av oppgave

Forslag til tema for oppgaven kom fra Stein Erik N. Fredriksen, orlogskaptein og teknisk saksbehandler i FLO MARKAP våpen- og sensortechnisk afdeling. Han ønsket å få bygget en skalert testmodell for måling av fartøys elektrisk signatur og med mulighet for endring av miljømessige faktorer som for eksempel salinitet/temperatur i farvannet og konduktivitet i havbunnen. Dette er en spennende oppgave som krever at man allerede har god begrepsforståelse innen elektrofysikk. Det vil også kreve at man har god kunnskap om og forståelse av det elektriske feltet rundt et fartøy, hvordan målingene blir gjort og hvordan sensorene fungerer. Disse forkunnskapene er nødvendig for å forstå hvordan forskjellige faktorer vil forstyrre måleprosessen. Det er ugunstig å bygge en større modell og gjennomføre målinger uten en arbeidspartner.

Ingeniørutdannelsen i elektro og automasjonsfaget på SKSK gir en enkel begrepsdannelse og innføring i prinsippene for elektriske felt, gjennom faget "Elektromagnetisme- og høyspenningssystemer". Derfor var det naturlig å starte på et mer grunnleggende nivå og gjøre dokumentstudier om temaet. Oppgaven kan senere brukes til å gjøre teoretiske analyser og gi forståelse om hvordan en god testmodell for måling av elektrisk signatur kan konstrueres.

Den elektriske signaturen til et fartøy er summen av alle de elektriske feltene rundt et fartøy, både alternerende og statiske. Den er også nært tilknyttet den magnetiske signaturen. I denne oppgaven vil det kun fokuseres på det totale statiske feltet alene, både for å begrense oppgavens størrelse, og fordi det vil forenkle modeller og eksempler uten at man mister betydningen de miljømessige faktorene har for målingen av feltet.

#### Innhenting av informasjon

Via oppdragsgiver fikk jeg artikkelen "Comparability of UEP Signatures Measured under varying Environmental Conditions" (Schäfer et al, 2013). Der bruker de analytiske beregninger og numeriske simuleringer for å se på virkningen av varierende miljømessige faktorer innvirkning på den målte elektriske signaturen, som de har sammenlignet med faktiske målinger.

For å innhente nødvendig kunnskap om grunnleggende fenomen innenfor temaet, har jeg søkt på internett med google.com og scholar.google.com som søkemotor, og brukt lærebøker fra studiene ved SKSK. I delkapittel

"Internettsøk" er det beskrevet mer inngående hvordan søkene på internett er foretatt.

"Physics for Scientists and Engineers, A Strategic Approach with Modern Physics" (Knight, 2014, ss. 807-1002) handler om elektriske ladninger og krefter, elektrisk felt, Gauss' lov, elektrisk potensial og sammenhengen mellom potensial og felt. Disse kapitlene gir en grundig innføring i elektrofysikken som kreves for å kunne utlede og forklare fenomenene bak problemstillingen.

For videre å kunne drøfte måling av elektrisk signatur, må man ha en god forståelse av målemetoden som blir brukt. I faget "Systemtenkning" som er en del av utdanningen på alle de tekniske linjene ved SKSK, lærer man om systemforståelse, sensorteori og måleteknikk, men faget har ikke tatt med måling av elektrisk signatur eller systemer hvor man bruker den typen måling. I faget "Automatiseringssystemer" som undervises i 2. klasse ved elektro- og automasjons linjen, lærer man også om måleteknikk, sensorteori og signalbehandling. Det er ikke noe spesifikt om måling av elektrisk signatur i det faget heller. Derfor har jeg brukt mye tid på å tillegge meg kunnskap om dette og skrevet et eget kapittel (kapittel 3) om temaet.

Det er publisert lite om systemene og sensorene som brukes i slike målinger. "Impedance characteristics for solid Ag/AgCl electrodes used as recording electric field generated by vessels in seawater" (Yan, Yuan-sheng, & Yu-su, 2009) handler om hvordan sølv-sølvklorid-elektroder, brukt til å måle elektrisk signatur fra fartøyer i sjøvann, har svært varierende impedans når det måles alternerende felt med varierende frekvenser. Her er det forklart hvordan sensorer med sølv-sølvklorid-elektroder fungerer.

#### Internettsøk

For å innhente kunnskap om temaet i oppgaven har det blitt gjort søk på internett. Det er for det meste brukt google.com som søkemotor på internett. Det er også brukt scholar.google.com, som kun gir treff på vitenskapelige kilder, for søkeord som har gitt lite relevante treff i google.com.

Flere av begrepene og indeksene som brukes for å beskrive fenomenene i oppgaven, er godt beskrevet på no.wikipedia.org eller på den engelske siden en.wikipedia.org. Det er typisk at det i disse forklaringene er brukt andre fremmedord for å beskrive temaet på siden, men da er det i de fleste tilfeller mulig å trykke på en hyperkobling til disse ordene som tar deg til en ny side som forklarer dem.

Flere av søkeordene har jeg fått fra oppdragsgiver, andre har vært fremmedord og faguttrykk som forekommer i lærebøker og artikler. Noen av søkeordene har vært nyttige for å komme frem til andre relevante søkeord.

SØKEORD	SØKEMOTOR	KOMMENTAR
Ag/AgCl electrode	Google	Treff youtube.com
Cathodic protection	En.wikipedia	Fra oppdragsgiver
Charged sphere	Google	
Corrosion	En.wikipedia	
Det periodiske system	Images.Google	
Dielektrikum	Google	
Electric field of a dipol bisecting plane	Google	
Electromagnetic_signature_and_reduction	Google	Fra oppdragsgiver
Elektrisk konduktivitet	Google	
Elektrisk leder	Google	
Elektrisk potensiale	Google	
Elektrokjemi	Google	
Elektrolyttens konduktivitet	Google	Se ionestrøm
Elektrolytter	Google	
Galvaniske spenningsrekken	Google	Fra oppdragsgiver
Glasselektrode	Google	
Havets konduktivitet	Google	
Ion selective electrodes	Scholar.Google	Fra oppdragsgiver
Ionestrøm	Google	Den store danske
Koksalt	No.wikipedia	
Konduktivitet	Google	
Marelec2001	Google	Fra oppdragsgiver
Måling av elektrisk signatur	Scholar.Google	
Nernst ligning	Google	
New_Electromagnetic_Stealth	Google	Fra oppdragsgiver
Overføringstill	Google	
Permabilitet	No.wikipedia	
Permittivitet i saltvann	Google	
Planet-Quest-Trial	scholar.google	Fra oppdragsgiver
Psu salinitet	No.wikipedia	
RIMPASSE	Google	Fra oppdragsgiver
Salinitet	No.wikipedia	
Saltinnhold i havet	Google	
Sensor for elektrisk signatur	Scholar.Google	
Sølv-sølvkloridelektrode	Google	Treff snl.no
Temperature differences in the sea	Google	
UEP sensor	Google	
UEP signature	Google	
Ulaklassen	No.wikipedia	
Underwater electric potential	Google	Fra oppdragsgiver
Viskositet	No.wikipedia	Treff
Hvordan måle elektrisk signatur	Google	
UEP signature measuring system	Scholar.Google	
Test station for UEP signature	Images.Google	
Underwater electrical potential signature measuring system	Google	
Galvanic series	Images.google	

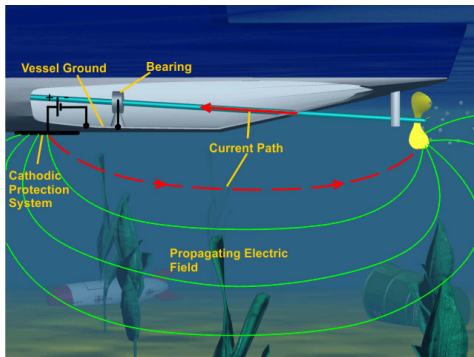
Tabell 2 1 viser ord som er brukt i søk på internett, søkemotoren som er brukt for å søke på ordet og eventuelt kommentar til søket.

## MÅLING AV ELEKTRISK SIGNATUR

Dette kapitlet gir en innføring i hva elektrisk signatur er, hvordan den kan måles, systemer der man benytter måling av elektrisk potensiale og signatur, og litt om bruken av digitale simuleringer av den elektriske signaturen.

### Hva er elektrisk signatur

Alle grunnstoffer har et elektrisk potensiale, bestemt av forholdstall mellom protoner og elektroner. Stoffer eller forbindelser som har forskjellig potensiale, vil skape en elektrisk strøm mellom seg om de er i kontakt med noe som har elektrisk ledeevne. Slik er det med alle fartøy. De er bygget av forskjellige bestanddeler og materialer, spesielt metaller, og vannet de flyter i fungerer som en elektrolytt mellom delene.



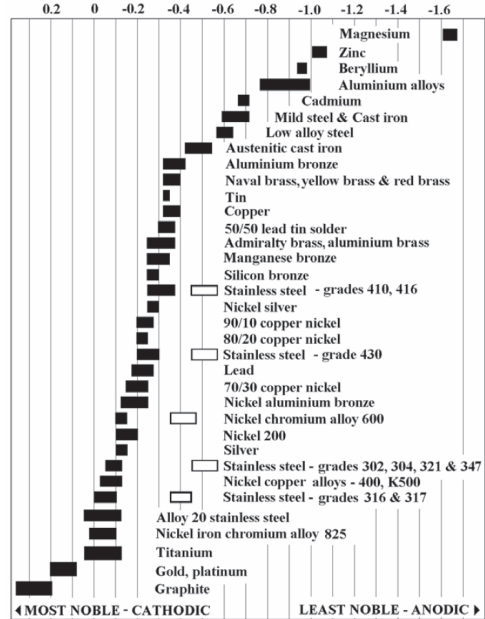
Figur 3.1 Viser polariseringsstrømmene og det elektriske feltet et fartøy genererer. Fra: [http://www.davis-eng.com/images/asg\\_cp\\_field.png](http://www.davis-eng.com/images/asg_cp_field.png)

Potensialforskjellene skaper et elektrisk felt rundt fartøyet, dette kalles fartøyet elektriske signatur.

Det er de ytre konstruksjonene som er avgjørende for et fartøys elektriske signatur, da skroget vil fungere som et Faraday-bur. Propellen er laget av mer edle metaller enn skroget og akslingen fungerer som en leder mellom dem.

Tabellen til høyre kan brukes til å finne ut hvor stor potensialforskjell vi kan forvente fra et fartøy med propell av marin messing (Naval brass) og skrog av stål (mild steel & cast iron). Messingen ligger mellom -0,3V til -0,4V og stålet -0,6V til -0,7V. Da vil differansen gjerne ligge på 0,2V til 0,4V.

Fartøyet elektriske signatur er satt sammen av alle de elektriske feltene fartøyet genererer rundt seg. Det vil være både alternerende og statiske felt. I denne oppgaven vil det kun fokuseres på det totale statiske feltet alene, både for å begrense oppgavens størrelse, og fordi det vil forenkle modeller og eksempler uten at man mister betydningen de miljømessige faktorene har for målingene av feltet.



Tabell 3.1 Den galvaniske spenningsrekken: Viser stoffer og forbindelsers elektriske potensiale målt i volt. En tabell er alltid laget av målinger gjort med samme type elektrode. Det gjør at forskjellige tabeller kan vise forskjellige verdier, men potensialforskjellen mellom stoffene i tabellene skal være tilsvarende.

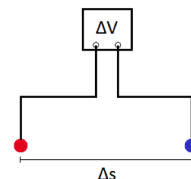
Fra: <http://www.ssina.com/images/corrosion/galvanic-series.gif>

### Sensorer

På samme måte som man ikke kan måle gravitasjonsfeltet på jorden, kan man heller ikke måle et elektrisk felt. Det man derimot kan måle er feltets virkning, som tyngdekraftens virkning på en masse, eller strømmen det elektriske feltet skaper i en elektrolytt.

### Sølv-sølvklorid

En av metodene for å måle elektrisk signatur er ved bruk av sølv-sølvkloridelektroder. Sølv-sølvklorid elektrodene er følsomme for ionestrømmen gjennom elektrolytten, i umiddelbar nærhet av seg. Ionestrømmen, som skapes av spenningen mellom skroget og propellen, vil endre det elektriske potensialet til elektrodene, og man kan måle forskjellen som  $\Delta V$  mellom to elektroder.



Figur 3.2 Måleprinsippet ved bruk av elektroder. Spenningsforskjellen måles mellom de to elektrodene og avstanden mellom dem er kjent.



En sensor består av to til seks elektroder, der ett og ett par måler spenningen i sin akse. Den totale feltstyrken, målt i et plan som et fartøy passerer over, er gitt som et vektorfelt og er det bildet man bruker for å beskrive den elektriske signaturen til fartøyet. Dette feltet er beregnet ved:

$$\vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y + \vec{E}_z$$

og forteller om vektorenes lengde og retning i forhold til dybde og utstrekning langs havbunnen. De tre aksene elektrodene er plassert i, er ikke nødt til å stå nøyaktig loddrett eller i vater, så lenge de er ortogonale i forhold til hverandre og man kjenner deres nøyaktige plassering. Man må også kjenne sensorenes nøyaktige plassering i forhold til hverandre.

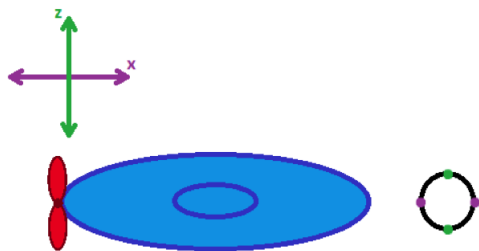
Om en dipol passerer rett over en sensor, i en rett linje, vil man se at feltet kun består av to komponenter: en i dybderetning og en i fartsretning. Det er fordi feltlinjene brer seg fra den positive til den negative polen og feltstyrken kun måles tangentialt på feltlinjene.

For å få et tredimensjonalt vektorfelt er man avhengig av at sensorene man bruker har tre elektrodepar, slik at man kan måle potensialforskjellen i tre akser. Om man ikke vet hvilken retning fartøyet går i, bør man også benytte tre elektrodepar i sensorene for å kunne bestemme fartsretningen.

Avstanden mellom elektrodeparene og hver enkelt sensor er *gitt*, slik at man kan bruke formelen

$$E = \frac{V}{s}$$

der V er av spenningsdifferansen mellom elektrodepar i forskjellige sensorer og s er avstanden mellom sensorene.



Figur 3.3 En ubåt sett ovenfra, på vei over en sensor som måler felt i to akser.

Sensorene er plassert flere sammen på havbunnen, på ca 13 meters dyp, sensorens diameter er 30-40cm og avstanden mellom sensorene er ofte 0,3 til 1 meter.

For å få et godt bilde av et fartøys signatur og for å kunne si noe om fartøyet hastighet og retning, er man avhengig av å ha flere sensorer, alle med tre elektrodepar og med kjent plassering i forhold til hverandre.

Sølv-sølvklorid har også en svakhet i forhold til at den er sensitiv for ionebevegelse. Det vil si at bevegelse av ioner rundt sensoren, som ikke er generert av det elektriske feltet fra et fartøy, vil redusere påliteligheten til sensorens avgitte målesignal.

### Målestasjoner og systemer

Det finnes flere målestasjoner for elektrisk signatur rundt om i verden. Det vanligste er stasjoner der man måler signaturen for så å gjøre tiltak for at den skal bli svakest mulig.

Måling av elektrisk signatur kan også brukes for å oppnå flere forskjellige strategiske funksjoner. Det kan være passive tiltak som å bidra til overvåking og sjøkontroll, eller som del i systemer for aktive tiltak som sjønektelse.

Moderne miner har komplekse deteksjonssystemer som er satt sammen av flere måleprinsipper. Minen kan ligge deaktivert og bli aktivert først av akustiske signaler. Lyd bærer godt under vann og er ikke en tilstrekkelig kilde for å bedømme avstand uten å benytte et ekkoprinsipp, som gjør man også røper posisjonen for hvor minen er plassert. Trykk eller måling av elektrisk potensiale vil derimot kunne fortelle minen noe om avstanden til fartøy i nærheten og trigges ut i fra det. Ved måling av UEP vil man kunne detektere et fartøy på en avstand som er 1,5 ganger fartøyet egen lengde eller mindre.

For å ha fullstendig sjøkontroll over et maritimt område, er man avhengig av overvåkningsmetoder som dekker både overflateaktivitet og undersjøisk aktivitet. Måling av elektrisk signatur vil kun fungere under vann, da man er avhengig av at målingene foretas i saltvann. Og det elektriske feltet brer seg ikke ut i luften, men har en fullstendig refleksjon i vannflaten. Måling av den elektriske signaturen alene er heller ikke tilstrekkelig for å få fullstendig sjøkontroll under overflaten, men med et system av flere deteksjonsmetoder benyttet sammen, vil måling av elektrisk signatur være et godt bidrag til å lage et fullstendig bilde av all den undersjøiske aktiviteten. For å kunne si noe om et fartøys fart og retning er man også avhengig av flere UEP-sensorer som er plassert ut over et areal som dekker en viss bredde og lengde. Dette er fordi man ved å sammenligne målingene til flere sensorer på forskjellige steder, i forhold til tid, vil kunne danne et bilde av fartøys bevegelse i tillegg til den elektriske signaturen.

Hvis man har flere UEP-sensorer plassert i en kjent formasjon på havbunnen i tillegg til et deteksjonsmiddel for å bestemme fartøyet avstand fra havbunnen og opp til fartøyet, som for eksempel en aktiv sonar, kan man



med større sikkerhet si noe om hva slags type og kanskje også hvilket fartøy man detekterer. Siden den elektriske feltstyrken til et fartøy er omvendt proporsjonal med avstanden til fartøyet opphøyd i tredje ved

$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qs}{r^3}$$

vil man få et langt mer pålitelig overvåkningsystem ved å kontinuerlig måle avstanden,  $r$ , opp til fartøyet og ta det med i beregningen av signaturen. Dette er viktig i forhold til ubåter, da de raskt kan endre dybden de går på og signaturbildet, i forhold til en som beveger seg rett frem på en gitt dybde.

### Digitale simuleringer og modeller

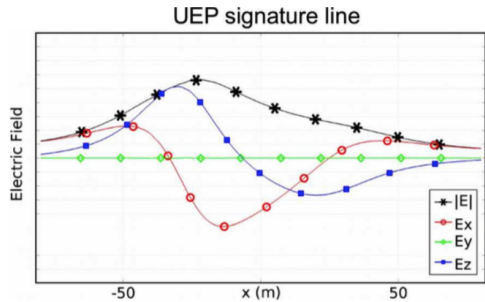
Som nevnt i delkapittel "Bakgrunn", er signaturen til et fartøy bestemt ut i fra flere komplekse faktorer. Elektrokjemien og elektrofysikken har formler som vi kan bruke til å beregne elektriske felt ut i fra disse faktorene. For å kunne si noe om hvordan og i hvor stor grad disse påvirker og endrer signaturen til et fartøy, er digital simulering et nyttig verktøy. Da kan man bruke formlene fra elektrokjemien og elektrofysikken til å lage digitale modeller og grafer som enkelt tydeliggjør faktorenes påvirkningsgrad.

Feltet rundt ubåten vil være som feltet til en dipol der propellen utgjør den positive polen og skroget den negative. Dette er på grunn av de galvaniske egenskapene til materialene som båten er bygget av. Skroget er laget av stål og propellen av en type cupronikkel. Stål ligger lenger mot uedle metaller på den galvaniske spenningsrekken enn cupronikkel, og disse potensialforskjellene gjør at du får en elektronstrøm gjennom metallkonstruksjonen fra propellen til skroget og en ionestrøm fra skroget til propellen. Ionestrømmen er den som gjør at vi kan måle det elektriske feltet. Dette feltet vil riktignok være noe forskjellig fra dipolfeltene som er beskrevet i lærebøkene på grunn av fasongen på fartøyet. Isteden for to like store kuleformede motpoler er det stor forskjell på størrelsen og formen til propellen og skroget, og korrosjonsstrømmene vil strømme ut i fra hele overflaten til skroget og bak til propellen.

Fra fysikken vet vi at det er viktig med gode tegninger for å kunne visualisere eksemplene våre og hvordan fysikkens lover fungerer i praksis. Der er dataprogrammer et viktig verktøy for å hjelpe oss å skape et prinsipielt bilde av hvordan feltet rundt er fartøy vil se ut. Ved hjelp av Coulombs lov, data for propellen og skrogets konstruksjon med tanke på størrelse, fasong og potensiale (ladning), vil man kunne lage digitale modeller som visualiserer feltet rundt et fartøy.

Til høyre er et eksempel på en digital simulering av den elektriske signaturen til en ubåt som beveger seg over en rett, 100 m lang, linje med sensorer i fartsretning. Ez måler feltstyrken i dybderetning og Ex i fartsretning. Vi ser at

$E_y = 0$  langs hele plottet. Dette er fordi det er akse som krysser båtens fartsretning. Den vil alltid være null når det ikke er noen potensialforskjell mellom styrbord og babord.



Figur 3.4 Plottet av feltstyrken fra en digitalt simulert ubåt som beveger seg over en sensor fra minus til pluss i x-retning. Fra: Schäfer et al, 2013

Digitale simuleringer gir oss allikevel ikke fasiten på hvordan det elektriske feltet til et fartøy vil se ut i en reell måling. Det er fordi resultatet av påvirkningsfaktorene er ukjent. Faktorer som vannets konduktivitet vil variere over tid og sensorens måling og signal vil påvirkes av støy.

### PÅVIRKNINGSFAKTORER

Det er forskjellige faktorer som kan påvirke den elektriske signaturen til et fartøy. Siden denne oppgave handler om endringene i signaturen ut i fra hvor fartøyet måles, skal vi se på miljømessige faktorer som kan virke inn på resultatet.

#### Polarisering

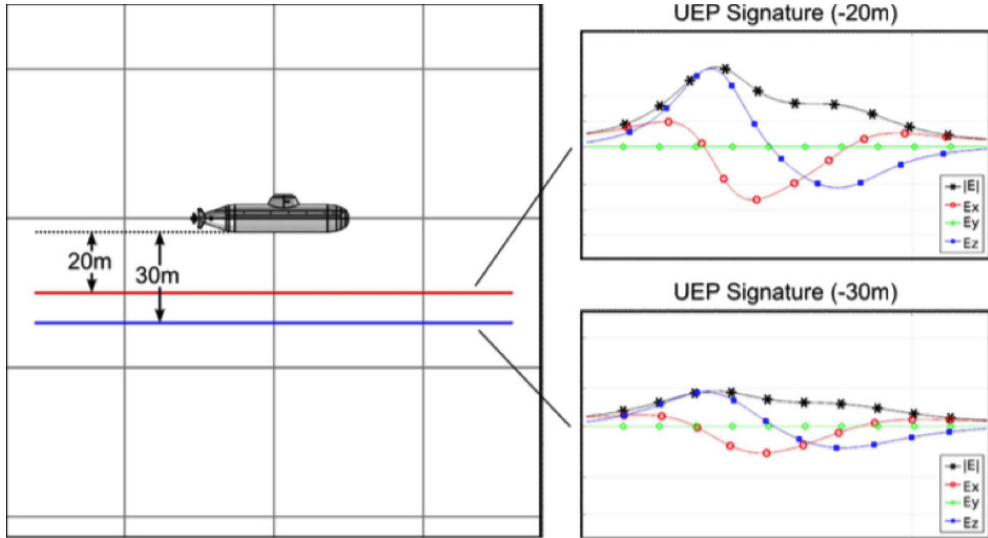
Ved eksponering for sjøvann vil det oppstå polariseringsstrømmer fra fartøyet. Dette er strømmer som oppstår på grunn av ladningsforskjellen i fartøyet propell og skrog. En grunnleggende lov innen elektromagnetisme er at alle komponenter med forskjellig potensiale ønsker å oppnå elektrisk likevekt. Med et ledende element, som propellens aksling, mellom seg vil det skape en elektronstrøm for å lade ut potensialet. Disse strømmene kaller vi polariseringsstrømmer. Polariseringsstrømmene vil stabilisere seg over tid, men blir ikke borte. Strømmene vil også endre seg ut i fra faktorer som

- fartøyet korrosjonsforebygging
- vannets pH-verdi
- vannets ledningsevne
- biologiske organismer som vokser på fartøyet

(Schäfer et al, 2013)

#### Måledybde

Her vil det også være spesielt interessant å se på ubåten som eksempel, på grunn av dennes evne til selv å endre avstanden fra seg og ned til sensoren. Hvis de kjenner til plasseringen av sensoren.

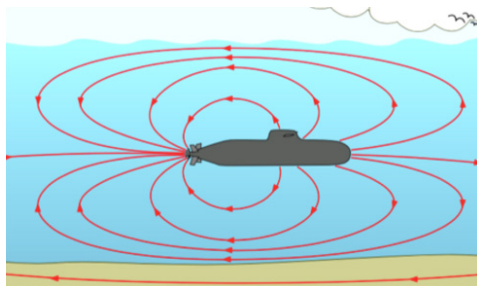


Figur 4.1 Viser en digital simulering av den elektriske signaturen (UEP Signature) til samme fartøy målt ved 20m og 30m avstand mellom sensor og fartøy. Resultatet viser at signaturen blir langt svakere når man øker avstanden. Fra Schäfer et al, 2013

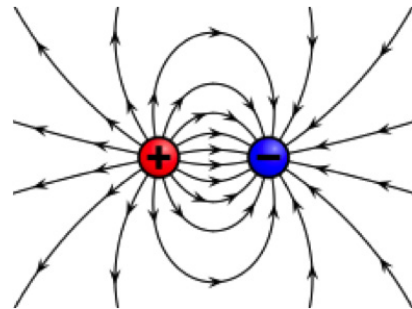
Fartøy som ubåter, er komplekst konstruert med tanke på utforming og sammensetting av forskjellige deler av forskjellige grunnstoffer. Når vi ser på hvilken betydning avstanden mellom fartøyet og målesensoren har på den elektriske signaturen, må vi forenkle feltet rundt fartøyet til feltet omkring en kjent fysisk modell.

#### Betydningen av avstanden til et dipolfelt

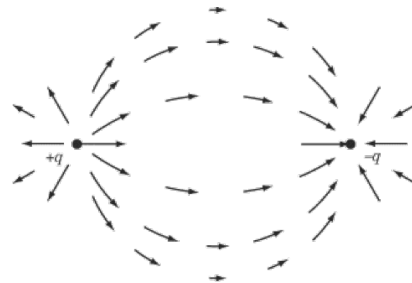
Som nevnt tidligere er det elektriske feltet rundt et fartøy meget komplekst. I dette eksempelet skal vi forenkle den ubåt til en elektrisk dipol, der den har overvekt med positiv ladning i propellen og negativ ladning i skroget. Den fysiske størrelsen, eller volumet, av skroget vil være mye større enn propellen. Dette ser vi vekk i fra i dette eksempelet, fordi det er avstanden fra dipolen og ned til sensoren som er det vi nå skal fokusere på, og ikke den spesifikke fasongen på feltet.



Figur 4.2 Hvordan ionestrømmene beveger seg fra skroget til propellen på grunn av dipolfeltet. Fra Schäfer et al, 2013



Figur 4.3 Dipol med felt visualisert med feltlinjer.  
Fra: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ed/VFPt\\_charges\\_plus\\_minus\\_thumb.svg/220px-VFPt\\_charges\\_plus\\_minus\\_thumb.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ed/VFPt_charges_plus_minus_thumb.svg/220px-VFPt_charges_plus_minus_thumb.svg.png)



Figur 4.4 Dipol med felt visualisert med vektorfelt.  
Fra: <http://img.sparknotes.com/content/testprep/bookings/sat2/physics/0005/>

Summen av feltet til en dipol er null når avstanden mellom målepunktet og dipolen er mye større enn avstanden mellom ladningene, det er fordi summen av den totale ladningen er null. Så når avstanden fra fartøy til sensoren blir mye større enn fartøyet lengde får vi:

$$\lim_{s \ll r} \vec{E}(s, r) = 0$$

Formelen for feltet i det kryssende planet til dipolen er

$$E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qs}{r^3}$$

der  $s$  er lengden av en rett linje fra senter av den negative ladningen til senter av den positive, og  $r$  er avstanden fra midten av linjen  $s$  til målepunktet. Det vil si at feltet avtar svært raskt med økende avstand  $r$ , men fartøyet lengde og elektrisk potensiale har også noe å si i forhold til avstanden til sensoren. Den målte feltstyrken, der det kun er måleavstanden som forandres, vil endre seg til

$$E_{ny} = E_{for} \frac{r_{for}^3}{r_{ny}^3}$$

### Vannets konduktivitet

For å gjøre det enkelt, sammenligner vi fartøyet som flyter i havet, med en spenningskilde med en leder mellom positiv og negativ pol. Saltvannet rundt fartøyet vil ha samme funksjon som lederen mellom de to polene og føre en elektrisk strøm. Det gjør at vi kan måle et elektrisk felt. Dog i dette tilfellet er det ikke en elektronstrøm, men en ionestrøm. Strømmen mellom polene er avhengig av lederens eller elektrolyttens konduktivitet,  $\sigma$ . Felstyrken  $E$  er bestemt av strømtettheten (strømmen gjennom et areal,  $I/A$ ) og konduktiviteten ( $\sigma$ ) ved:

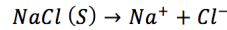
$$E = \frac{I}{\sigma A}$$

Konduktiviteten i et metall bestemmes ut fra metallens elektrontetthet og temperatur, der formelen for  $\sigma$  er utledet fra strømtettheten  $J$ .

$$J = n_e e v_d = n_e e \frac{F}{m} \tau = n_e e a \tau = n_e e \left( \frac{eE}{m} \right) \tau = \frac{n_e e^2 \tau}{m} E = \sigma E$$

Det er i noen grad overførbart til konduktiviteten til en elektrolytt, men ikke direkte. Selv det letteste ion er mange ganger tyngre enn et elektron. Der elektronets hastighet blir hemmet av kolliderende elektroner i metallens elektronsky, vil ionene måtte tvinges forbi andre ioner, atomer og molekyler. Det vil si at det krever mer energi for ionet å bevege seg gjennom elektrolytten. En direkte motsetning er at metaller har lav konduktivitet ved høye temperaturer, mens væsker har økt konduktivitet ved høye temperaturer, på grunn av økt atom- og molekylbevegelse. Væskers ledningsevne påvirkes også av viskositet. Lav viskositet gir høy ledningsevne, fordi da er væsken mer tyntflytende og det blir lettere for ionene å flytte seg. (Gyldendal, Danske leksikon, 2009)

I en elektrolytt forekommer det både positive og negative ioner. Sjøvann består i gjennomsnitt av 3,5% salter, der ca 77,8% av dette er koksalt (NaCl). Når saltet løses i vann, spres natrium- og kloridionene i reaksjonen



(wikipedia.org, 2016)

Elektrolyttens ledningsevne er summen av de enkelte iontypenes ledningsevne. Den lille delen av den totale ledningsevnen som en iontype bidrar med, kalles iontypens overføringstall. Hver iontypes ledningsevne er proporsjonal med konsentrasjonen av iontypen og med ionbevegeligheten. (Gyldendal, Danske leksikon, 2009) Dette er sammenlignbart med:

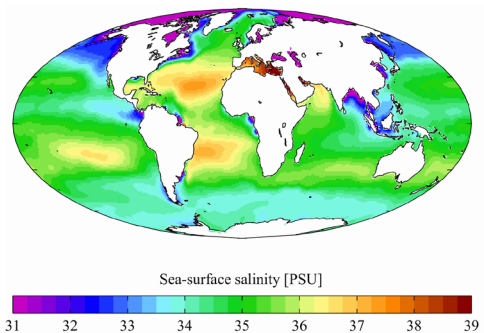
$$J = n_e e \left( \frac{eE}{m} \tau \right)$$

der  $eE$  er kraften som virker på ionene,  $n_e$  er antall ioner  $n_e$  ganget med ladningen til iontypen,  $m$  ionenes masse og  $\tau$  molekylbevegelighetens gjennomsnittstid (som i  $t = \frac{v_f - v_i}{a}$ ).

Slik ser vi at havets konduktivitet er avhengig av den kjemiske sammensetningen, spesielt saltinnhold, og temperatur.

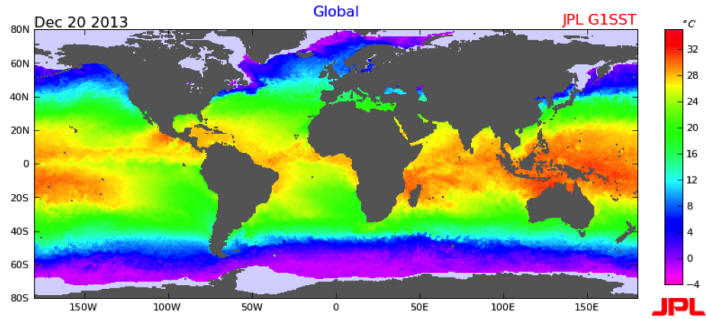
Det formelen ikke sier noe direkte om, er når havet allerede er i bevegelse, som ved bølger eller undersjøiske havstrømmer. Dette vil være interessant å undersøke i skalerte forsøk.

Havets saltinnhold, salinitet, er svært varierende rundt om i verden. Under er et verdenskart som ved hjelp av farger viser den varierende saliniteten og temperatur. Saliniteten vil variere ut i fra salter i havbunnen eller tilløp av ferskvann som ved polene eller utløp fra elver.



Figur 4.5 Variasjoner i saliniteten vist gjennom en fargeskala på verdenskartet. Merk de store variasjonene mellom Middelhavet og det baltiske hav. Fra: <https://no.wikipedia.org/wiki/Sjøvann>

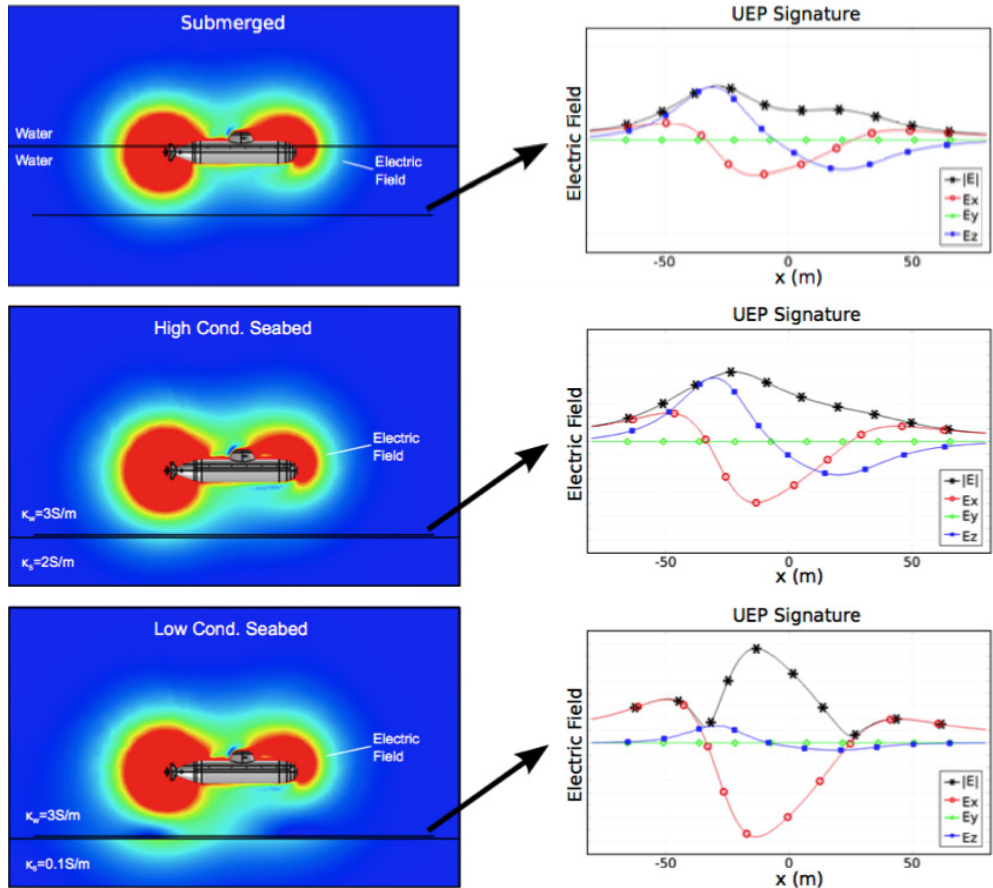
Figur 4.6 Her er et verdenskart med forskjellige havtemperaturer vist gjennom en fargeskala. Bildet viser oss at temperaturdifferansen kan være over 30°C. Fra: [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/4/40/SST\\_20131220\\_blended\\_Global.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/4/40/SST_20131220_blended_Global.png)



Temperaturen varierer også i stor grad ettersom hvor du befinner deg på kloden. Som sett på kartet over, er temperaturforskjellene så store som opp mot 36° C.

### Havbunnens konduktivitet

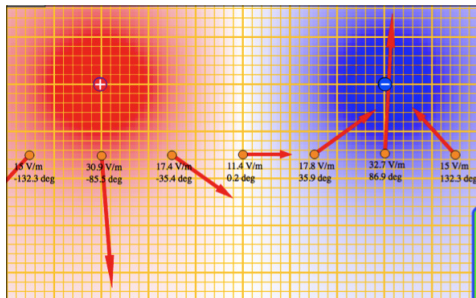
Konduktivitet er et stoffs evne til å lede strøm. Havbunnen kan ha varierende konduktivitet ettersom hva den består av og hvor mye sjøvann den inneholder.



Figur 4.7 Signaturen fra en ubåt som beveger seg i sjøvann med konduktivitet (her  $KW = \sigma_w = 3 \text{ S/m}$ ). Øverst går den i fritt vann, i midten nær en sjøbunn med litt lavere konduktivitet enn sjøvannet (her  $Ks = \sigma_s = 2 \text{ S/m}$ ). Og nederst går den over en sjøbunn med meget lav konduktivitet ( $Ks = \sigma_s = 0.1 \text{ S/m}$ ). Vi ser at de varierende forholdene har tydelig innvirkning på signaturen. Fra: Schäfer et al, 2013

Dette er en viktig faktor i militære sammenhenger siden miner veldig ofte ligger nære eller begravd i havbunnen. Når et fartøy beveger seg nærme en havbunn med annen konduktivitet enn sjøvannet, vil det endre formen på det elektriske feltet. Endringene er større jo nærmere du kommer havbunnen, der sensorene er plassert.

For å forstå hvordan feltet påvirkes når fartøyet kommer nære en sterkt eller svakt ledende havbunn, kan det være lurt å se på noen eksempler med grenseverdier. Et eksempel der en elektrisk dipol ligger nære en havbunn med uendelig høy konduktivitet ( $\sigma=\infty$ ) og et annet eksempel med fullstendig isolasjon, altså ingen konduktivitet ( $\sigma=0$ ).



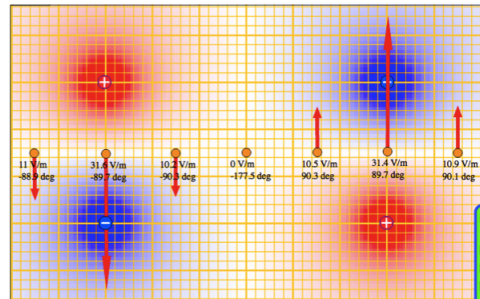
Figur 4.8 Forenklingen av ubåten og det elektriske feltet den genererer. Vi ser den positive og negative polen som den røde og blå sfæren. De oransje kulene blir som sensorene plassert på en linje under ubåten plassert helt på havbunnen. Hver sensor viser med en vektor styrken og retningen på feltet i sitt målepunkt. Fra: [http://phet.colorado.edu/sims/charges-and-fields/charges-and-fields\\_en.html](http://phet.colorado.edu/sims/charges-and-fields/charges-and-fields_en.html)

#### Havbunn med høyere konduktivitet enn sjøvannet

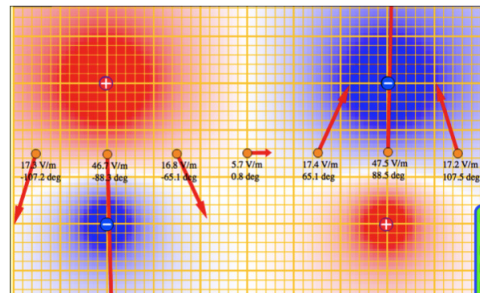
Vi forenkler ubåten til en elektrisk dipol i en homogen elektrolytt, her sjøvann, som ligger parallelt med og nære en havbunn bestående av et superledende materiale som vil si  $\sigma=\infty$ . Kraften fra det elektriske dipolfeltet som virker på havbunnen, gjør at elektronskyen i havbunnen flytter seg mot den positive enden av dipolen, mens de positive protonene står igjen alene under den negative polen. Det skaper et identisk, men motsatt rettet elektrisk dipolfelt i havbunnen. Altså en kvadrupol, der avstanden mellom den opprinnelige dipolen og havbunnen blir lik avstanden fra den induerte dipolen inne i bunnen og opp til sjøvannet. Det vil si at det elektriske dipolfeltet er symmetrisk over og under havbunnen. Alle feltlinjene vil da stå vinkelrett på symmetriaksene, havbunnen og en tenkt linje som går midt mellom motpolene på den opprinnelige og induerte dipolen. Derfor vil vi på havbunnen kun måle feltstyrken i én av tre dimensjoner, den som står vinkelrett på havbunnen.

Dette er bare et teoretisk eksempel, med bruk av grenseverdien  $\sigma=\infty$ , men det er et godt utgangspunkt i forhold til å forstå hvordan en havbunn med høyere konduktivitet enn sjøvannet vil påvirke målingene av den elektriske signaturen fra en ubåt.

Feltet fra ubåten vil induere et lignende, men speilvendt, elektrisk felt fra havbunnen. Den induerte feltstyrken er ikke på langt nær så sterk som den fra fartøyet. Det induerte feltet gjør at en del av de feltlinjene som gikk mellom motpolene i ubåten vil gå til de induerte motpolene og vi får en forsterkning av feltet i dybdens retning og svekking langs med havbunnen.



Figur 4.9 Den opprinnelige og den induerte dipolen som er helt like, men har positiv og negativ pol i motsatte ender. Vi ser hvordan feltstyrken parallelt med havbunnen er blitt eliminert. Fra: [http://phet.colorado.edu/sims/charges-and-fields/charges-and-fields\\_en.html](http://phet.colorado.edu/sims/charges-and-fields/charges-and-fields_en.html)

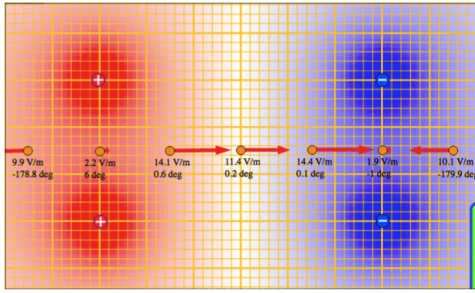


Figur 4.10 Her er ladningen i ubåt-dipolen dobbelt så stor som den induerte. Ved å sammenligne denne figuren med figur 4.8, som har samme ladning, ser vi at feltet blir svekket langs med havbunnen og forsterket i dybderetning. Fra: [http://phet.colorado.edu/sims/charges-and-fields/charges-and-fields\\_en.html](http://phet.colorado.edu/sims/charges-and-fields/charges-and-fields_en.html)

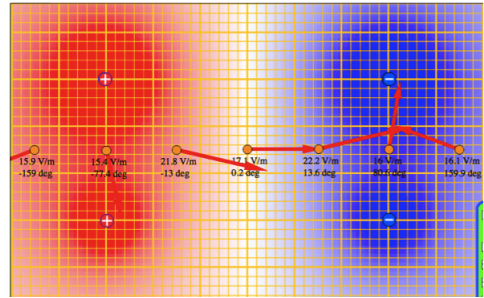
#### Havbunn med lavere konduktivitet enn sjøvannet

For å forstå virkningen av en havbunn som har lavere konduktivitet enn sjøvannet ser vi på et eksempel der havbunnen har uendelig lav konduktivitet,  $\sigma=0$ . Ubåten med sitt elektriske felt er forenklet til en elektrisk dipol med sitt felt. Dipolen flyter i sjøvann parallelt og nære en havbunn bestående av et dielektrikum som har uendelig lav konduktivitet. Dipolfeltet polariserer atomene i havbunnen, slik at det blir induert et motsatt virkende elektrisk dipolfelt fra havbunnen. Det induerte feltet i havbunnen er en nøyaktig speiling og symmetrisk med feltet fra den opprinnelige dipolen. Det vil gjøre at ingen feltlinjer kan gå ned i havbunnen, men de vil bøyes av og legge seg parallelt med den. Feltstyrken forsterkes langs med havbunnen og svekkes i dybdens retning.





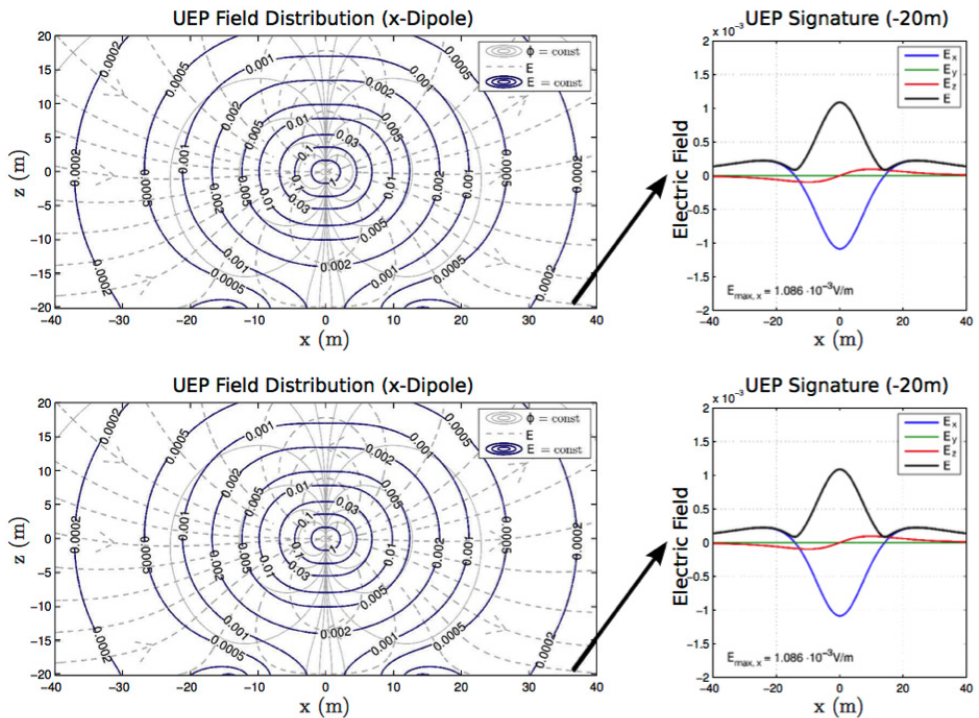
Figur 4.11 Med en havbunn som har uendelig lav konduktivitet, vil dipolfeltet speiles i havbunnen og feltstyrken i dybdens retning elimineres helt. Fra: [http://phet.colorado.edu/sims/charges-and-fields/charges-and-fields\\_en.html](http://phet.colorado.edu/sims/charges-and-fields/charges-and-fields_en.html)



Figur 4.12 Sammenlignet med figur 4.8 og 4.10, så ser vi hvordan feltet påvirkes av en havbunn med lav konduktivitet. Fra: [http://phet.colorado.edu/sims/charges-and-fields/charges-and-fields\\_en.html](http://phet.colorado.edu/sims/charges-and-fields/charges-and-fields_en.html)

Dette er et grenseverdi eksempel. Selv om konduktiviteten i havbunnen kan være lav, vil den ikke være null, og det induserte feltet blir ikke like kraftig som feltet fra ubåten. Dog, prinsippet for påvirkningen av feltet og hvordan feltlinjene bøyes er det samme som påvirkningen en

havbunn med lavere konduktivitet enn sjøvannet har på den elektriske signaturen til et fartøy. Når en ubåt går nærme en havbunn med lav konduktivitet vil feltet svekkes i dybdens retning, men forsterkes langs med havbunnen.

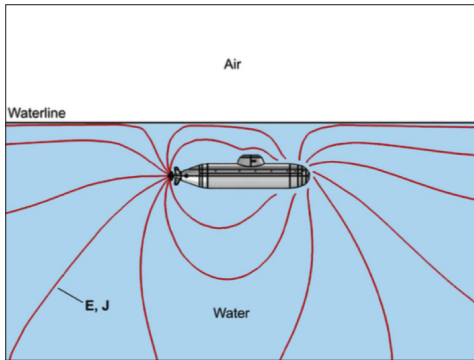


Figur 4.13 Viser det samme prinsippet som figur 4.8 og 4.12. Øverst er fra en ubåt i fritt vann, nederst er samme båten nærme en havbunn med lav konduktivitet. Her er det brukt feltlinjer, equipotensiallinjer og en graf til høyre. Legg merke til hvordan de stiplede linjene blir flate ved  $z = -20$  i det nederste bilde, i forhold til det øverste der de er symmetriske over og under  $z = 0$ . g Vi ser også forskjellen på den totale signaturen som er satt sammen av feltstyrken i dybde og fartsretning. Fra: Schäfer et al, 2013

### Påvirkning av fartøets dybde

En dipol i et helt homogent element vil ha en helt symmetrisk utbredelse av feltlinjer på alle kanter rundt en akse som går gjennom senter av begge polene. Fritt vannsmodellen har også relativt lik fordeling av feltlinjer over og under fartøyet, men noe forskjell vil det være på grunn av formen på skroget og propellen og at ladningstettheten ikke er helt jevn.

Feltlinjene vil ikke bre seg fra undersiden av vannflaten og opp i luften, på samme måte som at polariseringsstrømmene ikke vil gå gjennom luften, fordi den har alt for lav ledningsevne. Luften fungerer som et dielektrikum som polariseres og gir tilnærmet total refleksjon på grunn av polariseringsfeltet. Da vil feltlinjene som går opp mot vannoverflaten, bøyes av og gå parallelt med den. (Schäfer et al, 2013)



Figur 4.14 Viser hvordan feltlinjene bøyes av og legger seg parallelt med vannflaten. Fra: Schäfer et al, 2013

Når en ubåt beveger seg nærmere overflaten, vil arealet som feltlinjene går gjennom, bli mindre. Gauss' lov forteller oss at netto elektrisk fluks vil være konstant gjennom ethvert areal som omgir ladningene, uavhengig av arealets fasong eller størrelse.

$$\phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

(Knight, 2014)

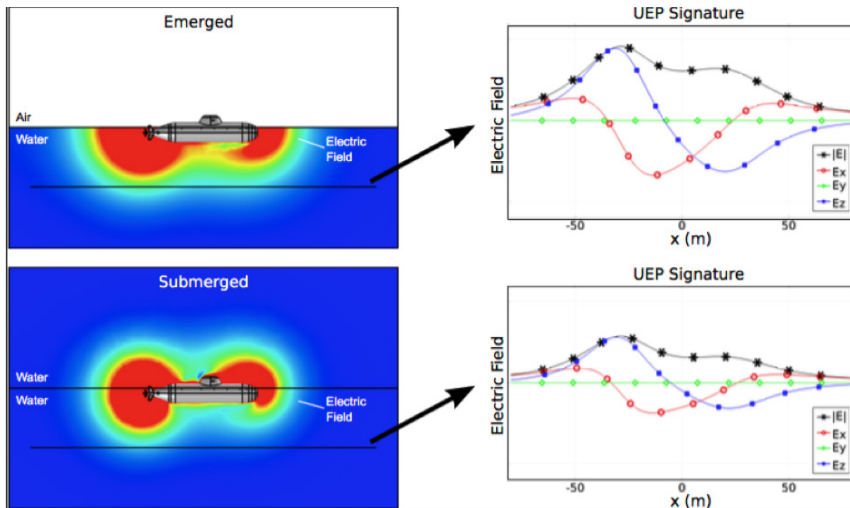
Den elektriske fluksen  $\phi_e$ , som er ladningen og  $\epsilon_0$  som er permittiviteten, vil være konstante. Og derfor vil feltstyrken  $\vec{E}$  øke når  $\vec{A}$ , som er størrelsen på arealet som står vinkelrett på feltet, avtar.

Dette vil i en mye større grad påvirke ubåter enn overflatefartøy, siden de kan være helt eller delvis neddykket. Om de går i oppdykket tilstand eller nære overflaten, har de et sterkere felt under seg, der sensorene ligger.

### DRØFTING

#### Målenøyaktighet

For å bruke den elektriske signaturen til kjenning er man nødt til å ha informasjon om fartøets signatur. Etter hva vi har sett i forrige kapittel, er vi også avhengig av at signaturen er målt med lik konduktivitet i vannet og sjøbunnen under målingene, avstanden mellom fartøyet og sensorene må være den samme og fartøyet skal ha de samme polariseringsstrømmene som ved tidligere målinger. Alle disse kriteriene må være oppfylt for å bekrefte at det er samme fartøyet som er målt tidligere.



Figur 4.15 Når en ubåt går oppdykket, vil polariseringsstrømmene som gikk i vannet over fartøyet, måtte finne en ny vei og gå på undersiden av fartøyet. Derfor blir feltet under fartøyet kraftig forsterket. Fra: Schäfer et al, 2013

Måling av elektrisk signatur i sjøen kan ikke sies å være spesielt nøyaktig. Den største påvirkningsfaktoren ser ut til å være avstanden mellom fartøyet og sensoren. Små variasjoner i denne avstanden endrer kraftig styrken på det elektriske feltet. Det ser allikevel ut til at dette skal kunne tas høyde for så lenge man kjenner til endringene og sammenligner målingene i forhold til dette. Ved å bruke deteksjon av elektrisk signatur i grunnere farvann vil man få sikrere resultater, siden dette begrenser avstanden en ubåt kan skape mellom seg og sensoren.

Vannets konduktivitet er en enkel faktor å monitorere i et lite område, og skal også være lett å ta høyde for i en omregning av hvordan feltstyrken rundt fartøyet vil påvirkes. Så lenge konduktiviteten i måleområdene er homogen.

Det er vanskelig å si hvordan signaturen vil endre seg i forhold til konduktiviteten i havbunnen. Det er krevende å skulle måle eller beregne havbunnens konduktivitet. Og om man i tilfelle har disse dataene, er det meget vanskelig å si hvordan de vil deformere den målte signaturen.

For å kunne sammenligne signaturen målt av et fartøy på forskjellige målestasjoner, er man avhengig av å kjenne til hele målesystemet som er benyttet på de forskjellige stasjonene, og ha kunnskaper om hvordan forskjeller i systemene kan gi forskjellige resultater. Man må kjenne til sensor- eller elektrodetype, fysisk plassering, programmering, kobling og kabelstrekk og all elektronikk som er del av systemet.

Hvordan et fartøy selv kan være i stand til å endre sin egen elektriske signatur, er et spennende konsept. Ut i fra det som kommer frem i denne oppgaven, kan det se ut til at med kjennskap til hvor sensorene er plassert og hvilke faktorer som påvirker signaturen kan man manipulere sensorens måling ved listig manøvrering, formasjonsseiling eller utplassering av elektrisk ladde ”lokkeduer”.

### **Militære bruksområder**

Måling av elektrisk signatur kan brukes i flere militære sammenhenger, hovedsakelig som en deteksjonsmetode for hvorvidt det er undersjøisk skipsaktivitet i et område.

Som vi har sett i denne oppgaven, er avstanden mellom sensor og fartøyet meget viktig i forhold til den målte feltstyrken. Dette gjør at elektrisk signatur kan være et godt hjelpemiddel til å si hvorvidt det beveger seg fartøy i nærheten av en sensor eller ikke, men man er avhengig av at avstanden mellom fartøyet og sensoren er liten sammenlignet med fartøyet lengde. Når avstanden blir større enn 1,5 ganger et fartøys lengde, vil man ikke kunne detektere et fartøy ved hjelp av måling av ionestrøm. Dette er fordi den målte spenningen blir for lav på avstander større enn dette, slik at det er usikkert hvorvidt man måler et fartøys signatur eller bare målestøy.

Det er tenkelig at et overvåkning- eller deteksjonssystem som bruker andre deteksjonsmetoder kombinert med deteksjon av elektrisk felt, vil kunne gi langt mer pålitelige målinger. Den akustiske signaturen er også unik for alle fartøy, men lett å forfalske ved bruk av høyttalere. Ved å kombinere disse to signaturløstene kan med stor sikkerhet fastslå hvilket fartøy som er i nærheten, siden det er vanskelig å manipulere den elektriske signaturen. All gjenkjenning gjennom signatur krever riktignok at man kjenner fartøyet signatur fra tidligere.

Avstandsmåling sammen med elektrisk signatur kan også være en god kombinasjon, der man bruker avstandsmåling til å detektere hvorvidt det er noe i vannet og den elektriske signaturen til å avgjøre om det er et fartøy. Avstanden er også en av faktorene som forteller hvor sterk signatur du kan forvente i målepunktet, og gjør at den elektriske signaturen sammen med en avstandsmåling vil gi et sikrere måleresultat.

Det vil ikke være gunstig å bruke måling av elektrisk signatur alene til undersjøisk kjenningstjeneste. Denne oppgaven viser at det er så mange miljømessige varierende faktorer som fører til store variasjoner i den målte signaturen, derfor vil ikke målenøyaktigheten være god nok til å bruke til kjenningstjeneste alene.

Måling av elektrisk signatur kan være et element av et større system som kombinerer flere måleprinsipper sammen og bruker de forskjellige måledataene til å analysere resultatene i forhold til hverandre. Et slikt system ville kunne vært verdifullt for et land som Norge med lang kystlinje og mange fjorder. I inngangen på en fjord er det ofte en fjordterskel, som er et grunnere parti. Ved å installere et overvåkningssystem der, vil man kunne ha oversikt over skipstrafikk både under og over vann. Det grunnere partiet vil også gi målingene større pålitelighet, og tilgjengeligheten av systemet blir bedre enn på dypt vann. Et slikt system vil kunne bidra til full sjøkontroll under vann og på overflaten. Det vil være mulig å gjøre nøyaktige nok målinger til å bruke systemet til kjenningstjeneste og dermed også kartlegging av operasjonsmønstret til fartøyene som går inn og ut av fjordene.

### **KONKLUSJON**

Elektrisk signatur er det elektriske feltet et fartøy genererer rundt seg på grunn av de galvaniske egenskapene til metallene det er bygget av. Et elektrisk felt kan ikke måles, på lik linje med et gravitasjonsfelt, men man kan måle virkningen det har på omgivelsene. Denne oppgaven ser på hvordan man måler elektrisk signatur ved bruk av sølv-sølvkloridelektroder som er følsomme ovenfor ionestrømmen i havet.

De vanligste sjømilitære bruksområdene for måling av elektrisk signatur i dag er i detoneringsmekanismen til



sjø-miner, og målestasjoner der man måler den elektriske signaturen til et fartøy og gjør tiltak for å redusere den.

Digital simulering er et nyttig verktøy i forskning og forsøk på den elektriske signaturen, for å spare tid og kostnader ved å gjøre reelle eksperimenter. Og det er en god måte å visualisere eksempler. Det gir ikke en god nok nøyaktighet til å kunne fastslå den elektriske signaturen til et fartøy, da den påvirkes i så stor grad av miljømessige faktorer.

Den elektriske signaturen til et fartøy vil påvirkes av miljømessige faktorer som polarisering, måledybde, fartøyets dyptgående, vannets og havbunnens konduktivitet. Det er mulig å beregne hvordan noen av disse miljømessige påvirkningene vil endre den målte elektriske signaturen, som vannets konduktivitet eller fartøyets avstand til sensoren.

Resultatet av de varierende miljømessige faktorene påvirker signaturen i så stor grad at det ikke vil være hensiktsmessig å bruke måling av elektrisk signatur alene til kjenningstjeneste av fartøy. Det vil derimot kunne være et brukbart og nyttig element i et større målesystem som benytter flere måledata sammen. Og elektrisk signatur er en god indikator på hvorvidt det er et fartøy i nærheten av en sensor.

## KILDER

- Dubson, M. (u.d.). *Charges and Fields*. (University of Colorado Boulder) Hentet fra PHET Interactive Simulations: [http://phet.colorado.edu/sims/charges-and-fields/charges-and-fields\\_en.html](http://phet.colorado.edu/sims/charges-and-fields/charges-and-fields_en.html)
- Gyldendal, Danske leksikon. (2009, 1 31). *Ionledning*. Hentet fra Den Store Danske: [http://denstoredanske.dk/It,\\_teknik\\_og\\_naturvidenskab/Fysik/Faste\\_stoffers\\_transportegenskaber/ionledning](http://denstoredanske.dk/It,_teknik_og_naturvidenskab/Fysik/Faste_stoffers_transportegenskaber/ionledning)
- Knight, R. D. (2014). *Physics for Scientists and Engineers, A Strategic Approach with Modern Physics, Third Edition*. Pearson.
- Schäfer, D., Doose, J., Pichlmaier, M., Rennings, A., & Erni, D. (2013). *Comparability of UEP Signatures Measured under Varying Environmental Conditions*. Hentet fra [http://www.ate.uni-due.de/data/dokumente\\_2013/MARELEC\\_2013\\_Schaefer\\_Env.pdf](http://www.ate.uni-due.de/data/dokumente_2013/MARELEC_2013_Schaefer_Env.pdf)
- wikipedia.org. (2016, apr 13). *Koksalt*. Hentet fra [no.wikipedia.org: https://no.wikipedia.org/wiki/Koksalt](https://no.wikipedia.org/wiki/Koksalt)
- wikipedia.org. (2016, feb 5). *Permittivitet*. Hentet fra [Wikipedia.org: https://no.wikipedia.org/wiki/Permittivitet](https://no.wikipedia.org/wiki/Permittivitet)
- Yan, Z., Yuan-sheng, W., & Yu-su, S. (2009, 02). Impedance characteristics for solid Ag/AgCl electrode used as recording electric field generated by vessels in seawater. *Journal of Shanghai University (English Edition)*, 13(1), ss. 57-62.

---

# Styrkeberegning av en fremtidig undervannsfarkost

- Det er tanken som teller -

Tekst: Stian Valand og Vegard Bratberg

I denne studien har vi fått tilgang til en trykktank som skal bygges om til en undervannsfarkost. Denne trykktanken skal kunne dykke på en trygg og sikker måte ned til en dybde på 400 meter. Vi har jobbet ut i fra følgende problemstilling:

Kan denne trykktanken videreutvikles til en undervannsfarkost med et operasjonsområde ned til 400 meter, og samtidig ivareta sikkerheten til personellet?

*Denne artikkelen er et sammendrag av bacheloroppgaven.  
Oppgaven er tilgjengelig på <https://brage.bibsys.no/xmlui/handle/11250/2450111>.*

---

## 1. INNLEDNING

I denne studien har vi fått tilgang til en trykktank som skal bygges om til en undervannsfarkost. Denne trykktanken skal kunne dykke på en trygg og sikker måte ned til en dybde på 400m. Dette fører oss frem til vår problemstilling:

*Kan denne eksisterende trykktanken videreutvikles til en undervannsfarkost med et operasjonsområde ned til 400 meter, og samtidig ivareta sikkerheten til personellet?*

For å løse denne problemstillingen har vi valgt å bruke den britiske standarden PD5500, som benytter seg av et eldre og anerkjent empirisk formelverk. I tillegg har vi valgt å gjennomføre en Finite Element Analysis (FEA) ved hjelp av simuleringverktøyet Abaqus, for å sammenligne resultatene fra PD5500.

### 1.1 Utgangspunktet

Utgangspunktet var en eldre nitrogentank som har blitt konstruert for å tåle et innvendig arbeidstrykk på 35 bar. I tillegg forelå det et materialsertifikat fra DNV GL, som gav grunnleggende informasjon om stål kvaliteten til trykktanken. Det har tidligere blitt gjennomført en Non Destructive Testing (NDT) av sveisesømmene, som

i dette tilfellet ble gjennomført ved en røntgeninspeksjon. Det ble ikke avdekket noen avvik, som medfører at sveisesømmene antas å være i god stand.



Figur 1. Eksisterende nitrogentank

### 2.1.1 Tekniske data og stål kvalitet opprinnelig tank:

Utvendig diameter: 1149mm  
Innvendig diameter: 1125mm  
Godstykkelse: 12mm  
Sylinderlengde: 1501mm  
Total lengde: 2141mm  
Ståltype: RAEX 386 (384) P, Finkornet kjelestål.  
Flytegrense: 355 MPa  
Strekkfasthet: 490 – 620 MPa

## 2. OPPSUMMERING

### 2.1 Teori

Teorien som presenteres, omhandler i hovedsak feilmøder som oppstår dersom en trykketank blir utsatt for hydrostatisk trykk. I tillegg benytter den britiske standarden, PD5500, dette formelverket til sine beregninger. Trykketankens dimensjoner tilsier at den kan defineres som en tynnskallet trykkbeholder, noe som medfører at teori om membranspenninger og tynnskalldonstruksjoner kommer til anvendelse. I tillegg presenteres FEA på en kort og konsis måte.

#### 2.1.1 Sikkerhetsfaktor

Sikkerhetsfaktor kan defineres som:

*«... forholdet mellom den kritiske belastningen som ifølge beregningene medfører brudd, flyting el.l, og den høyest ventede belastningen» (Waløen 1994, 206).*

Dette betyr at dersom tillatt dykkedybde er 400m, og kollapsdybden er 800m, vil dette gi en sikkerhetsfaktor på 2. Valg av sikkerhetsfaktor blir ofte bestemt etter skjønnsmessige vurderinger. En må da ta høyde for alle usikkerhetsfaktorer, og gjøre en samlet vurdering på bakgrunn av dette (Waløen 1994, 206).

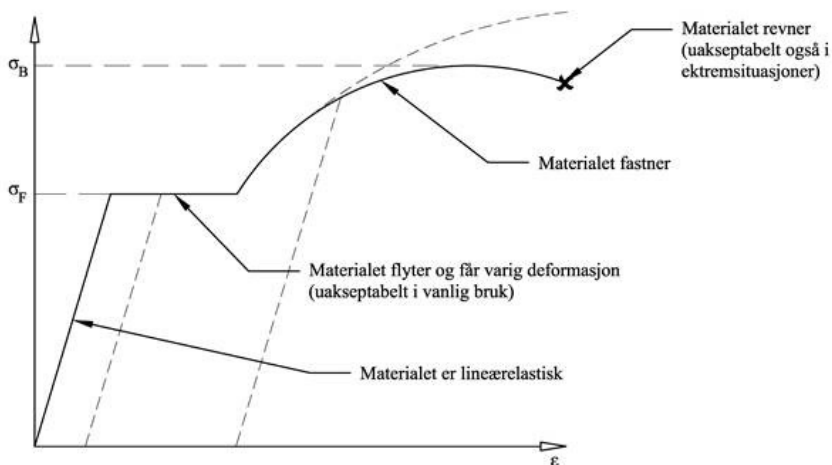
#### 2.1.2 Flyt i stål

Når materialet blir utsatt for store normalspenninger, vil det oppstå tøying, og etterhvert flyt i materialet. Dette skjer når normalspenningen blir høyere enn flytegrensen ( $\sigma_F$ ). Materialet vil da gå fra å være i en elastisk sone til å bevege seg ut i det plastiske området. I det plastiske området vil det oppstå en varig deformasjon av materialet, og dette er ikke ønskelig i en konstruksjon (Callister, Rethwisch 2011, 217-221).

#### 2.1.3 Buckling av en tynnvegget sylinder og dome

Direkte oversatt fra engelsk til norsk betyr buckling knekking. I denne studien er det valgt å bruke buckling som begrep. Når en trykkbeholder kommer under eksternt hydrostatisk trykk, vil den kunne implodere. Dette vil si at områder på trykkbeholderen blir presset inn av det uniforme trykket som virker på flatene (Ross 2011, 2). Grunnen til dette er at når sylindere blir utsatt for eksternt trykk, vil det oppstå membranspenninger i skallet. Imploderingen som oppstår, er en følge av at membranspenningene i skallet omdannes til bøyepenninger, og får materialet til å knekke (Bushnell 1981, 1187). Hvis sylindere er lang, vil den kunne bli oval eller flattere som følge av bucklingen. Det er vanlig å skille mellom 2 typer buckling. Dette er interframe buckling og overall collapse. Interframe buckling betyr at buckling skjer i området mellom ring-stiverne. Overall collapse kan oversettes med total kollaps og vil si at bucklingen skjer aksesymmetrisk langs sylindere, både ring-stiver og skall kollaps. På en sylinder uten ring-stivere vil buckling inntreffe ved et mye lavere trykk enn ved aksesymmetrisk flyt (Ross, Little, Haidar, Waheeb 2009, e158). Formelverket innenfor buckling-teori bygger på en blanding av analytiske tilnærminger og empiriske forsøk (Ross 2011, 100).

En dome vil ofte kollaps ved såkalt «snap-through» buckling. Dette er en kombinasjon av flyt og buckling hvor kurvaturen ved senter av domene imploderer. Grunnen til dette er at økningen av trykkspenninger på domene ikke er lineær med økningen i det eksterne hydrostatiske trykket, og vil dermed føre til «snap-through» buckling. Enkelte eksperimenter har og vist at en dome kan buckle inn i lobes, ved et usymmetrisk mønster rundt senter av domene (Ross 2011, 144).



Figur 2. Spenning/tøynings diagram. Her brukes  $\sigma_F$  for flytegrense.



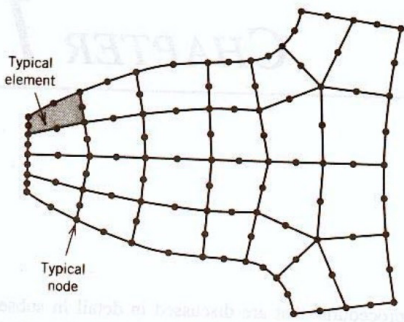
Figur 3. Interframe buckling



Figur 4. Total kollaps

### 2.1.4 Finite Element Analysis

Finite Element Analysis (FEA), også kjent som Finite Element Method (FEM), er en metode for å approksimere spenningsanalyser. En geometrisk struktur blir delt opp i flere elementer. Disse elementene blir holdt sammen ved hjelp av noder. Dette kan ses på som et slags lim mellom elementene. Rutenettet som oppstår av elementer og noder kalles for en mesh.

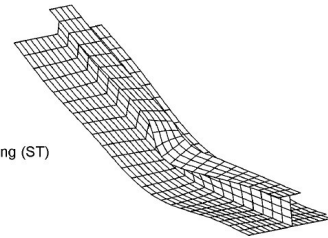


Figur 5. Mesh

Nodene består av flere simultane algoritmer og ligninger. Hver node vil ha et fast antall frihetsgrader, hvor bevegelsen kan begrenses ved hjelp av grensebetingelser. Dette gjør at en kan simulere hver node til å bevege seg slik en ønsker. Hvert element blir analysert hver for seg, og deformasjonen til elementet blir interpolert mellom resterende elementer som fører til en tilnærming av strukturens totale deformasjon (Kim et al. 2004, 6-13).

### 2.1.5 Tripping av ring-stivere

Denne form for feilmode er en sideveis vridning av ring-stiveren om dets festepunkt på skroget (BSI 2015, 3/98). Det kan ses på som en slags lateral torsjons buckling av ring-stiveren. Vanligvis vil denne feilmoden inntreffe plutselig og resultere i en vesentlig reduksjon av bæreevne til ring-stiveren (Sheik, Grondin, Elwi 2001, 2).



d) Stifener Tripping (ST)

Figur 6. Tripping av ring-stiver

## 2.2 Oppsummering av resultat

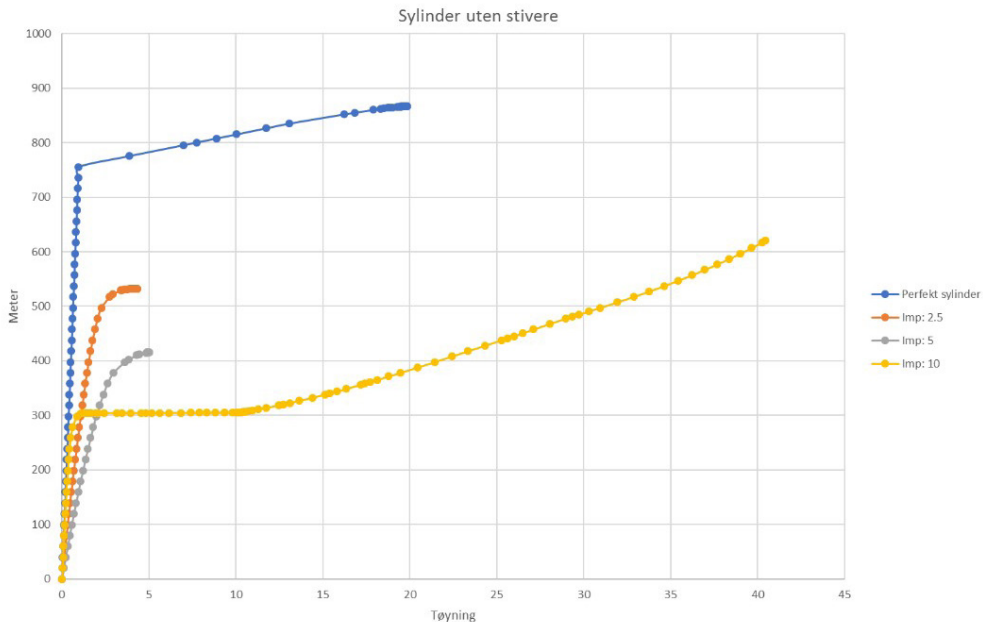
Det er blitt valgt å dele inn trykktanken i sylinder og dome, hvor domens gjenspeiler «endene» på trykktanken.

### 2.2.1 Dimensjonering av ring-stivere

På bakgrunn av beregningene gjort for hånd har det blitt kommet frem til at en T-stiver, med dimensjoner som vist på figuren under, vil tilfredsstillende PD5500s krav om forsterkning. Denne T-stiveren vil bli tilvirket til en ring-stiver.



Figur 7. Dimensjoner T-stiver.



Figur 8. Sylinder uten ring-stivere

Det finnes lite teori som omhandler forsterkning av dome, da spenningsbildet vil opptre mye mer komplekst enn ved en sylinder. Forsterkning av dome er derfor kun gjennomført ved 3D-modellering og FEA.

### 2.2.2 Resultat PD5500

PD5500 bruker VonMises sin formel til beregning av trykk ved interframe buckling. For denne type feilmode er det i denne studien valgt å bruke Windenburg & Trilling sin forenklede formel<sup>1</sup>, og dermed fravike PD5500. Grunnen til dette er at resultatene viser at Windenburg & Trilling gir et mer konservativt resultat, som anses som fordelaktig. I tillegg skriver Carl T.F Ross (2011) i sin lærebok at Windenburg & Trilling gir omtrent samme resultater som ved bruk av VonMises sin formel (Ross 2011, 102).

Feilmoden interframe buckling gir en kollapsdybde på 843m. Denne kollapsdybden er da blitt redusert med hensyn på kollapskurver gitt av PD5500. Kollapskurvene fra PD5500 bygger på empiriske forsøk, og skal redusere kollapsdybden for å kompensere for en imperfekt geometri på trykkbeholderen.

Total kollaps blir med hensyn på PD5500 beregnet til ca. 1815,7 bar, noe som tilsvarer en dybde på omtrent 18150 meter.

Domen blir beregnet til en kollapsdybde på 496m. Dette er uten noen form for forsterkning. Dersom sikkerhets-

faktor på 2 blir lagt til, blir dette en mye lavere tillatt dykkedybde enn ønsket. En forsterkning av domene blir derfor gjennomført ved en FEA i Abaqus.

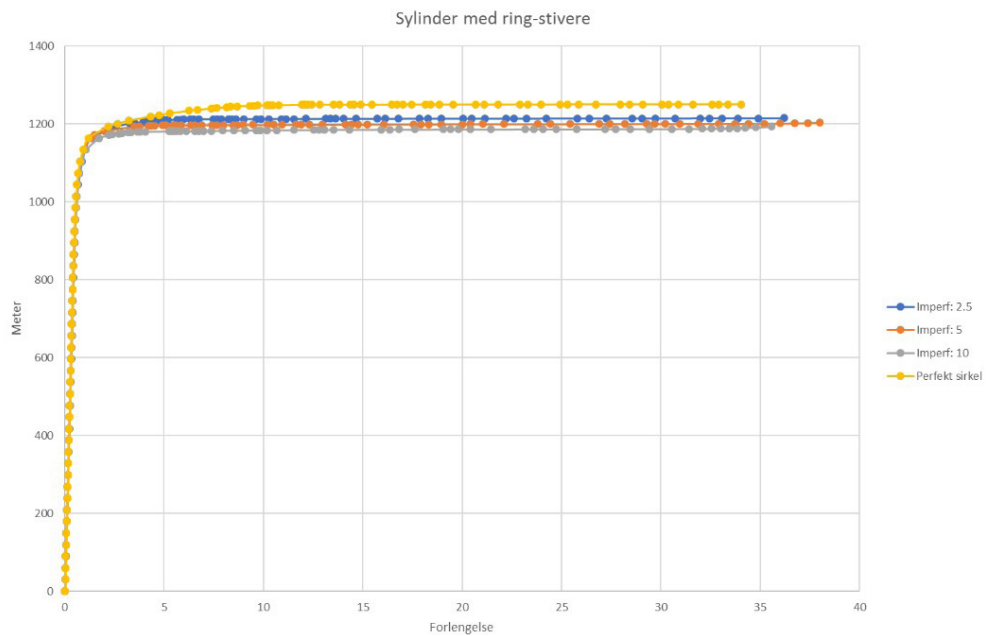
### 2.2.3 Resultat FEA

De fleste teoretiske tilnærminger til buckling tar for seg at strukturen innehar en perfekt sirkulær form og er dermed optimistisk i forhold til når buckling vil inntreffe. I og med at de fleste sirkulære konstruksjoner vil ha en viss grad av ovalitet, eller imperfeksjon, kan geometrisk feil bidra til at buckling vil kunne inntreffe tidligere enn det som er beregnet. Imperfeksjonene blir lagt inn i analyseprogrammet for å simulere feil i geometrien. Disse verdiene gjenspeiler en imperfeksjonsamplitude som kan svinge for eksempel  $\pm 5$ mm. Det har derfor blitt gjennomført simuleringer med ulik grad av imperfeksjonsamplitude på både sylinder og dome.

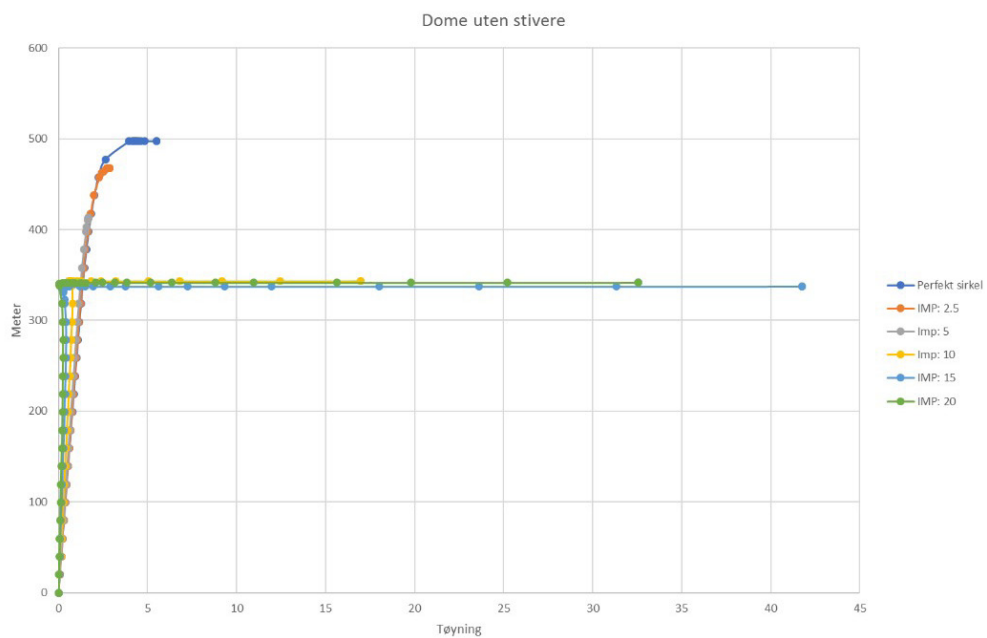
#### 2.2.3.1 Uforsterket sylinder

På figur 8 kan en se de ulike kollapsdybdene som følge av økende imperfeksjonsamplitude til en sylinder som ikke er forsterket. Av grafen fremkommer det at det er en vesentlig reduksjon i dybde før kollaps vil inntreffe dersom det foreligger imperfeksjoner. En perfekt geometri på sylindern vil gi kollapsdybde på ca 750m. Dersom konstruksjonen har en imperfeksjonsamplitude på 10mm, reduseres kollapsdybden til ca 300m.

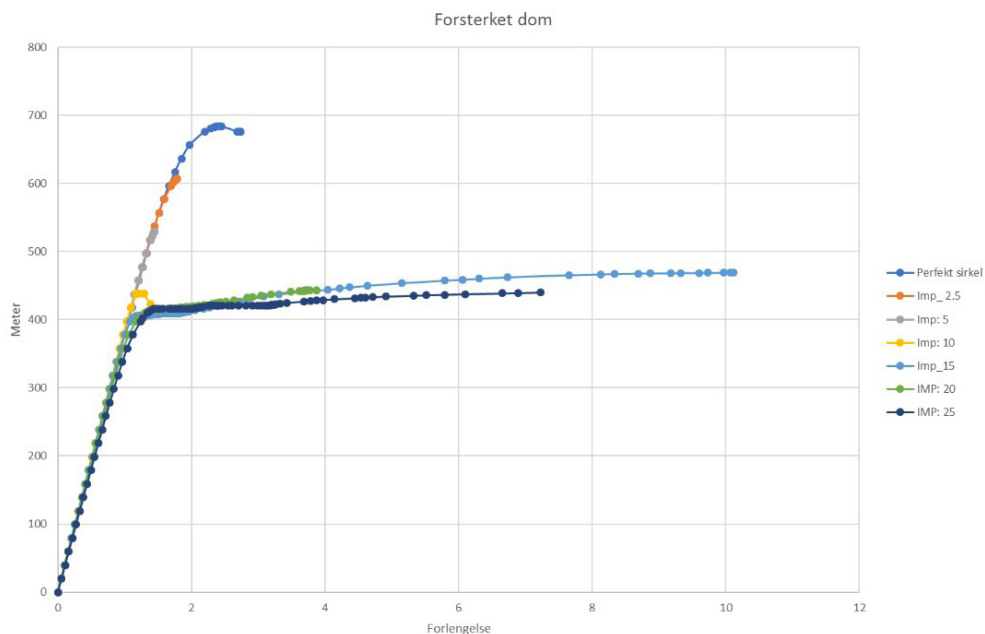
<sup>1</sup> Windenburg & Trilling: 
$$P_{cr} = \frac{2,6E\left(\frac{t}{2a}\right)^{5/2}}{(1-\nu^2)^{0,75}\left[\left(\frac{t}{2a}\right) - 0,447\left(\frac{t}{2a}\right)^{1/2}\right]} \quad (\text{Ross 2011, 102})$$



Figur 9. Kollapskurver forsterket sylinder



Figur 10. Kollapskurver dome.



Figur 11. Kollapskurve forsterket dome.

### 2.2.3.2 Forsterket sylinder

Figur 9 viser kollapskurvene til en sylinder som forsterket med ring-stivere. En kan observere at kollapsdybden konvergerer mot ca 1130m. Kurvene viser at det er relativt lite forskjell i kollapsdybde ved imperfeksjoner fra 2.5 til 10mm. Dette tyder på at ring-stiverne er designet kraftige nok til at sylindere tåler påkjenningene.

### 2.2.3.3 Uforsterket dome

Kollapskurvene viser at dess mer imperfekt dome er, dess mindre dybde skal til for å oppnå kollaps. En kan se at en perfekt dome kollapser ved 465m. Ved en imperfeksjonsamplitude på 10mm, vil en oppnå kollaps allerede ved 330m. Dette er en forskjell på 135m i forhold til en perfekt dome, og er en markant reduksjon i kollapsdybde. Ved å øke imperfeksjonsamplituden ser det ut som kurvene konvergerer mot ca. 330m. Dette indikerer at en med rimelig sikkerhet kan anta en kollapsdybde på 330m uten avstivere på dome.

### 2.2.3.4 Forsterket dome

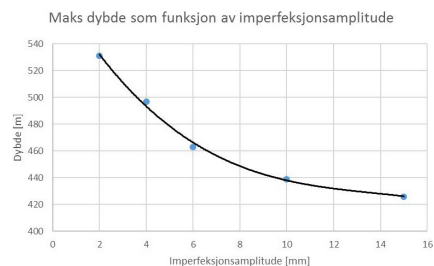
En dome med perfekt sirkulær form, gir kollapsdybde på ca. 650m, noe som er en signifikant forbedring fra 465m uten forsterkning. Av kollapskurvene ser en at kapasiteten til dome reduseres kraftig ved imperfeksjoner. Ved en imperfeksjonsamplitude på 5mm, ser en at kapasiteten fra en perfekt dome reduseres med nesten 130m. Dersom imperfeksjonsamplituden øker, kan det se ut som at kollapsdybden konvergerer mot 400m. Fra en imperfeksjon på 10mm og opp til 25mm, varierer

dybden fra ca 430m til 400m. En kan da anta at dome trolig vil ha en kollapsdybde på 400m.

### 2.2.4 Tredjeparts verifikasjon

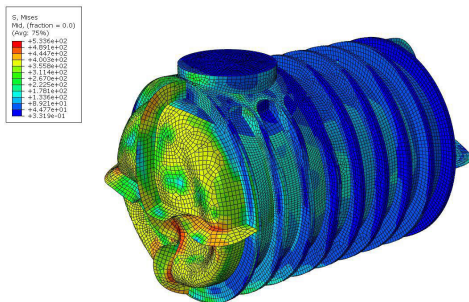
Tredjepartsverifikasjonen ble gjennomført av DNV GL, og hensikten var å analysere farkosten i sin helhet og for å kunne sammenligne egne resultater. De har muligheten til å benytte seg av en betraktelig mer finmasket mesh, som vil gi et mer pålitelig resultat.

Av grafen kan en betrakte kollapsdybden som funksjon av imperfeksjonsamplitude. Det kan observeres at imperfeksjoner har stor betydning for hvilken kollapsdybde farkosten estimeres til. Ifølge rapporten fra DNV GL vil en kollapsdybde på ca. 420m være et konservativt estimat på kapasiteten til farkosten. Dersom det foreligger en verifikasjon på at dome faktisk er tilnærmet geometrisk perfekt, vil det være mulig å få en kollapsdybde over 500m.



Figur 12. Maks dybde som funksjon av imperfeksjonsamplitude.





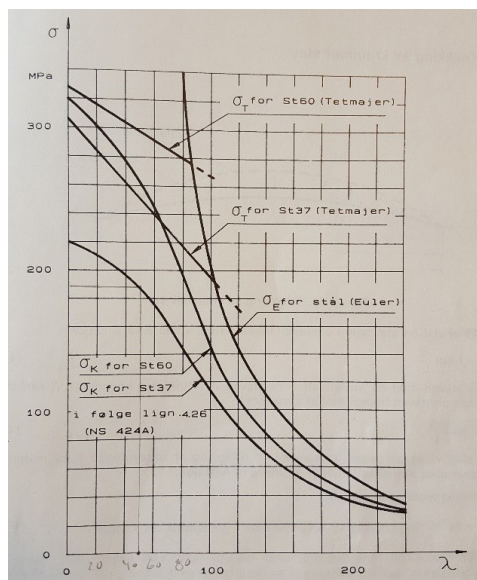
Figur 13. Hele farkosten i total kollaps.

### 3. DISKUSJON OG BETRAKTNINGER

#### 3.1 Sylinder

Sylindren vil uten forsterkninger få en drastisk reduksjon i kollapsdybde dersom geometrien er imperfekt. Fra perfekt geometri til en imperfeksjonsamplitude på 10mm reduseres kollapsdybden med hele 450m. Dette betyr at sylindren må forsterkes for å oppnå tilfredsstillende resultater.

Den forsterkede sylindren blir beregnet til å kollapse ved 843m ved interframe buckling, og 18150m ved total kollaps. Sistnevnte anses som for høyt og meget urealistisk. Det er ikke funnet feil i beregningene eller beregningsmetodikken, men en av grunnene til det høye tallet kan være at det tas høyde for en perfekt geometri ved beregninger av total kollaps i PD5500.



Figur 14. Knekkingskurver, stål

FEA viser at den forsterkede sylindren vil kollapse ved 1130m. Det er lite forskjell i kollapsdybde ved økende imperfeksjonsamplitude. Grunnen til dette kan være at sylindren har et høyt slankhetstall. Dette vil bidra til at dess høyere slankhetstallet er, dess nærmere vil materialet komme Euler spenningene for knekking vil inntreffe. Euler spenningene er en idealisering av knekkspenningene og innebærer blant annet en perfekt geometri (Waløen 1994, 132-133).

Det er relativt stor divergens ved bruk av PD5500 og FEA. Mest konservativ er PD5500, med kollapsdybde på 843m ved interframe buckling. Dette er en forskjell på omtrent 300m fra FEA. I og med at ønsket dykkedybde er 400m med sikkerhetsfaktor på 2, er begge resultatene godt innenfor kravet, og sylindren kan anses som tilstrekkelig forsterket. Erfaringene til nå tilsier at PD5500 underestimerer kollapsstrykket ved interframe buckling, og overestimerer ved total kollaps. Ross (2011) har i sin bok «Pressure Vessels – External pressure technology» også kommet frem til tilsvarende funn (Ross 2011, 360).

#### 3.2 Dome

Uten forsterkning blir domene beregnet til å kollapse ved dybden 495m i henhold til PD5500, og 465m i henhold til FEA. Dette er oppsiktsvekkende like resultater. I følge FEA vil kollapsdybden til domene uten avstivere konvergere mot 330m.

Sitatet under viser et utdrag fra PD5500 som omhandler sikkerhetsfaktor ved bruk av kollapskurver:

“... The rules generally give a safety factor of 1.5 on the lower bound of experimental collapse results” (BSI 2015, 3/96).

Dette tolkes dithen at PD5500 i sine kollapskurver har inkludert en sikkerhetsfaktor på 1,5, og dersom en skal følge denne regelen uten ytterligere sikkerhetsfaktorer blir tillatt dykkedybde 330m. Dette er oppsiktsvekkende da kollapskurvene i PD5500 skal ta høyde for imperfeksjoner, men gir en tillatt dykkedybde lik kollapsdybden funnet med hensyn på FEA. Her kan en trolig si at PD5500 overestimerer kollapsdybden.

Den forsterkede domene konvergerer mot en kollapsdybde på 400m ved økende imperfeksjoner. Ettersom det foreligger mye usikkerhet omkring domens faktiske geometri og nøyaktighet, er det naturlig å nytte det mest konservative resultatet til kollapsdybde. Dersom en i større grad kan fastslå hvor imperfekt domene faktisk er, vil en kunne øke kollapsdybden ytterligere.

#### 3.3 Farkosten i sin helhet.

Det hersker liten tvil om at det er domene som er den dimensjonerende parten på farkosten. Kollapsdybde på 400m vil tilsis en maksimal tillatt dykkedybde på 200m.



Dette resultatet samsvarer også bra med resultatene fra DNV GL. I og med at FEA er en anerkjent metode innenfor styrkeberegning av konstruksjoner utsatt for hydrostatisk trykk, og egne resultater samsvarer med 3. parts verifikasjon, vurderer vi det dithen at en sikkerhetsfaktor på 2 må være akseptabelt. Ved en kollapsdybde på 400m, vil det tilsvare en tillatt dykkedybde på 200m. I tillegg er det nærliggende å tro at resultatene fra DNV GL og egen FEA gir et mer troverdig bilde av faktisk kollapsdybde.

Sylindren kan anses som tilstrekkelig forsterket, dog kan det diskuteres om ring-stiverne er noe overdimensjonert med tanke på at domene vil kollapse ved 400m. En kan spare mye vekt i stål ved å velge lettere ring-stivere dersom en aksepterer at 400m er kollapsdybden til farkosten. Det har liten hensikt at sylindren kolliderer ved 1130m, når domene allerede har kollapset ved 400m.

Det er og blitt gjennomført analyser av området rundt lukeåpningen. Det viser seg at ved nåværende design, vil lukeåpningen redusere kollapsdybden til 970m. Dette viser at åpningen har en viss påvirkning, men kollapsdybden er fortsatt godt innenfor kravene gitt i denne studien.

#### 4. KONKLUSJON MED ANBEFALINGER

Det ble allerede ved de første beregningene slått fast at domene ikke ville tåle ønsket designtrykk. Analysene viser at uten forsterkning, vil domene i verste fall ha en kollapsdybde på 330m. Domene ble forsøkt forsterket med to avstivere tvers over flatene, med felles skjæringspunkt i senter av domene. Resultatene viser at det har effekt å bruke avstivere på domene, men effekten av dette var mindre enn forventet. Det er derfor rimelig å konkludere med at en ytterligere forsterkning av domene vil kunne øke kollapsdybden noe, men det er svært usikkert hvor mye effekten av slik forsterkning faktisk blir.

DNV GLs 3. parts verifikasjon konkluderer i sin rapport med at domene er det svakeste punktet på tanken, og at kollapsdybde vil etter konservativ beregning være 426m. Disse resultatene samsvarer bra med egne resultater fra Abaqus, da vi har kommet frem til 400m kollapsdybde ved konservativ beregning. I og med at våre simuleringer samsvarer med analysene gjort ved DNV GL, ser vi få grunner til at vi ikke skal konkludere med at kollapsdybden til farkosten er 400m. Dette betyr at maksimal tillatt dykkedybde konkluderes til å være 200m, med sikkerhetsfaktor på 2.

Vi mener det er 3 alternativer for videre arbeid av studien. Det første alternativet er å akseptere kollapsdybden slik det er nå, og deretter optimalisere ring-stiverne på sylindren for å redusere stålvekten. Alternativ nr. 2 er å ytterligere forsterke domene ved hjelp av avstivere. Alternativ nr. 3 er å gjennomføre en 3D-skanning for å verifisere geometrien til domene, og dermed kunne

oppnå en økt kollapsdybde dersom det viser seg at geometrien innehar få imperfeksjoner. Vi anbefaler alternativ nr. 2 og 3 i en kombinasjon, da vi tror en ytterligere forsterkning vil ha effekt, og domene mulig er innenfor en imperfeksjonsamplitude på 5mm som vil gi økt kollapsdybde

Ved bruk av vårt design fra denne oppgaven, viser beregningene at det ikke lar seg gjøre å dykke under vannsfarkosten ned til 400m med sikkerheten ivarett.

#### 5. LITTERATURLISTE

- Ross, Carl T.F 2011. *Pressure vessels: External pressure technology*. Cambridge: Woodhead Publishing Limited.
- The British Standard Institution (BSI) 2015. *PD5500: Specification for unfired fusion welded pressure vessels*. BSI Standards Limited.
- Ross, Carl T.F, A.P.F. Little, Y.Haidar og A.A. Waheeb. 2009. *Buckling of Carbon/Glass Composite Tubes Under Uniform External Hydrostatic Pressure*. Portsmouth: University of Portsmouth.
- Sheikh, Imtiaz A, Gilbert Y. Grondin, Alaa E. Elwi 2001. *Stiffener Tripping In Stiffened Steel Plates*. Edmonton: University of Alberta. <https://era.library.ualberta.ca/files/1544bp979/SER236.pdf>. 09.03.17
- Bushnell, David 1981. *Buckling of Shells - Pitfall for Designers*. Palo Alto: Lockheed Palo Alto Research Laboratory. <https://shellbuckling.com/papers/bosor4/1981.pitfalls.pdf>. 09.03.2017
- Waløen, Åge Ø. 1994. *Maskindeler Bind 1*. Tapir Forlag.
- Callister William D. JR, David G. Rethwisch 2011. *Materials Science and Engineering*. Asia: John Wiley & Sons.
- Kim, Il Yong, Olivier de Weck. 2004. *Finite Element Method*. Massachusetts Institute of Technology. [http://web.mit.edu/16.810/www/16.810\\_L4\\_CAE.pdf](http://web.mit.edu/16.810/www/16.810_L4_CAE.pdf) 01.05.17





# “Navigare necesse est, vivere non necesse”

Roar Espevik

The quote is attributed to Pompey (56 BC), who used it to urge his sailors on when they refused to set sail on a stormy sea, in order to bring grain from Africa to Rome where people were starving. This is a task familiar to every naval officer: to do his or her duty to society when the situation demands it, is more crucial than own survival. The quote means, literally, “It is necessary to sail, it is not necessary to live”. This means that it is necessary to depart, even if you are not at all sure that you will ever arrive.

It is more “necesse” than ever that we set sail within the academic world. The picture on the front page, the possible monster, Nessie of Loch Ness, symbolizes our quest for knowledge within the naval domain. What is truth? With what kind of certainty can we claim to know the truth? These are central questions whether dealing with a monster or with naval warfare. It is an ongoing process that makes us wiser but not certain. The Royal Norwegian Naval Academy dates back 200 years and the purpose of our magazine is to put our competence, or sometimes even the lack of it, out into the open for debate. We have a threefold wish; to invite to debate and reflection, to present competent arguments, and to publish knowledge gained through peer reviewed research. In short, we have a deep desire to present through “Necesse” our latest academic thoughts, research and efforts concerning anything that is important to a naval officer. “Necesse” will include scientific articles, especially brilliant bachelor papers by our cadets, and works of scholars at our own Academy or others writing within the naval officer sphere.



ISBN 978-82-93550-13-6