NECESSE

ROYAL NORWEGIAN NAVAL ACADEMY
MONOGRAPHIC SERIES

VOLUME 1 ISSUE 2 2016

Realfag og teknologi for marineoffiseren

→ Innholdsfortegnelse

«Necesse» kommer i 5 utgivelser hvert år. Skriftserien har til enhver tid Dekan som hovedredaktør og en fagredaktør for hver utgivelse. Samlet under hoved-overskriften sjømilitær profesjonskompetanse har vi en tverrfaglig tilnærming hvor 5 sjømilitære fagfelt; Militær Navigasjon, Sjømilitær Teknologi, Logistikk/sikkerhetsstudier Sjømakt og Sikkerhet, Sjømilitært Lederskap, og har vært sitt nummer i løpet av et år. Alle synspunkter i denne publikasjon står for forfatterens egen regning. Hel eller delvis gjengivelse av innholdet kan bare skje med forfatterens samtykke.

Roar Espevik

PB 5 Haakonsvern, 5886 BERGEN

ISSN 2464-353X
ISBN 978-82-93550-03-7 (elektronisk utgave)

Tittel: Necesse
Royal Norwegian Naval Academy monographic series
Volume 1, Issue 2, 2016
Undertittel: Realfag og teknologi for marineoffiseren
Foto omslag: http://www.scotlandnow.dailyrecord.co.uk

Hovedredaktør: Roar Espevik, dekan Sjøkrigsskolen

Fagredaktører: Gisle Stand og Ellen Margit Krätzig-Berle

Omslag og layout: Katrine Austgulen, HOS Grafisk
Trykk: HOS Grafisk, Sjøkrigsskolen

NECESSE

ROYAL NORWEGIAN NAVAL ACADEMY
MONOGRAPHIC SERIES

VOLUME 1 ISSUE 2 2016

Realfag og teknologi for marineoffiseren

Innhold

Del 3
MATEMATIKK I BRUK

Del 4
GJENGIVELSE AV ARTIKLER

→ Innholdsfortegnelse

Forord

Gisle Strand

Den Kongelige Norske Marine hadde sitt 200 års-jubileum i 2014. I 2017 er det Sjøkrigsskolens tur. Siden utdanning av marineoffiserer ble den norske stats ansvar, har Sjøkrigsskolen hatt et innhold bestående av teoretiske og praktiske emner tilpasset de sjømilitære forhold. De matematiske, naturvitenskapelige og tekniske fag har hele tiden hatt stor plass og betydning. De danner grunnlaget for tenkning og metodisk tilnærming. I disse snart 200 år har marineoffiserene opplevd en enorm teknologisk utvikling. Skrogtyper, materialer, maskineri, elektrisitet, radio, artilleri, torpedoer, miner, sjøfly, radar, sonar, missiler, programmerbare analoge og digitale datamaskiner, for å nevne noe. Sjøkrigens natur er utfordrende – et krigsfartøy må kunne operere på egenhånd, i all slags vær, langt fra hjelp og assistanse og over lang tid. Disse forhold har preget Sjøkrigsskolen og utdanningen av de kommende offiserer. Historisk har marineoffiseren ofte tatt initiativ for å prøve ut og lære seg nyvinninger slik at en ikke blir akterutseilt. Historier som marineoffiseren Kaptein Carsten Tank-Nielsen som tok initiativ, ble valgt ut, fikk stipend, studerte elektroteknikk og motorlære ved den tekniske høyskolen i Hannover for å kunne lære seg det nye ubåtvåpenet. Han beordret videre Premierløytnant Hans Fleischer Dons, som også hadde blitt sendt av den norske stat til Tyskland for å studere elektronikk ved høyskolen i Charlottenburg, til på ny å reise tilbake for å lære seg å fly. I mellomtiden var undervannsbåten Kobbens flykomité i gang med å samle inn penger til flykurs og flykjøp. Den 1.juni 1912 lettet Marinens første fly med Dons bak spakene og Carsten Tank-Nielsen som første passasjer.

Sjøkrigsskolens oppgave er å sørge for at de nyutdannede offiserene er godt skolert slik at de gjennom videre oppøving og trening er i stand til å utnytte de tekniske innretninger og ikke minst ha holdninger og kunnskap som bidrar til å drifte det hele til så lav kostnad som mulig. Lærerkreftene ved Sjøkrigsskolen har alltid bestått av sivile og militære slik at de teoretiske og praktiske sammenhenger ivaretas. De sivile dosentene ble i sin tid ansatt som embetsmenn og har vært med å prege Sjøkrigsskolens utvikling med sin stabilitet. Den siste av embetsmennene ved Sjøkrigsskolen, dosent Dagfinn Andreassen, har i dette nummeret nyttet anledningen til å se litt tilbake innen matematikkundervisningen og tar også frem forhold rundt dagens situasjon.

Alt endrer seg og innen utdanning er det spesielt vanskelig å se konsekvenser av disse da det alltid vil gå mange år før det er mulig å se hvordan handlinger og beslutninger er blitt påvirket.

Dette nummeret av Necesse speiler litt av aktiviteten ved Sjøkrigsskolen. Nye hjelpemidler innen undervisning åpner for nye måter å gjennomføre utdanningen. Den digitale verden betyr mange nye muligheter, både innenfor det pedagogiske, men også innen det tekniske. For marineoffiseren har det vært, og er, viktig å følge med, teste og eksperimentere for å få mest mulig innsikt i teknologiens styrker og svakheter.

Matematikk, statistikk og sannsynlighetsteori er kunnskap som er viktige innen flere marine relaterte områder. Vanskelig for noen, lettere for andre, men viktig for en organisasjon som skal bruke og forvalte en Marine bestående av stadig færre, men mer kapable enheter. Utviklingen er at det blir færre mennesker ombord, alle må kunne mer og bidra til å holde teknologien i gang. I dette nummeret er det flere eksempler på matematisk anvendelse og ett eksempel, spesielt, på anvendelse av kunnskap tilegnet, basert på studiene ved skolen, et kadettarbeid - en bachelor oppgave - gjennomført til høyeste karakter. Den viser meget godt hvordan god matematikk kan løse og håndtere et praktisk problem.

Vi håper du finner innholdet i denne utgaven av Necesse engasjerende, og vi oppfordrer deg mer enn gjerne til å ta kontakt med forfatterne på epost for oppklaring eller videre diskusjon.

Ansatte ved teknologi

→ Innholdsfortegnelse

Høgskolelektor i matematikk
Ellen Margit Krätzig-Berle

Leder Teknologiavdeling
ellen.berle@sksk.mil.no

59 år, har arbeidet som høgskolelektor i matematikk på SKSK siden 1984, vært leder for teknologi-avdelingen siden 2011. Utdannet som «Diplom-Mathematiker» ved universitetet i Mainz (Tyskland).

Dosent
Dagfinn Andreassen

Data/matematikk
dagfinnolaf.andreassen@sksk.mil.no

Jeg ble cand. mag. ved universitetet i Oslo i 1969. I perioden 1971-1973 var jeg vitenskapelig assistent ved Norges Tekniske Høgskole, Trondheim, samtidig som jeg fullførte min cand. real. (1972, formelt ved Lærerhøgskolen i Trondheim). 1973-1976 var jeg doktorgradsstudent ved universitetet i Dundee, Skottland, så derfra har jeg min Ph.D i matematikk. Deretter var jeg 1 år vikar som førsteamanuensis ved NTH, og så var jeg konsulent og førstekonsulent i Statens Rasjonaliseringsdirektorat, Oslo. Begynte som dosent ved Sjøkrigsskolen i november 1980. Nå underviser jeg i datakommunikasjon og operativsystemer for teknisk bransje, og matematikk for OM og LOG.

Førstelektor
Knut Meen

Matematikk
knut.meen@sksk.mil.no

Førstelektor i matematikk ved Avdeling for teknologi siden 2000. 63 år. Cand.real fra Universitetet i Bergen, 1978. Pedagogisk seminar 1981. Sivil verneplikt 1978 – 1979. Tidligere arbeidsplasser: Matematisk Institutt, Universitetet i Bergen, 1979 – 1986. Seksjon for Medisinsk Statistikk og Informatikk, Universitetet i Bergen, 1986. FFV Aune, 1987. Askøy videregående skole, 1987 – 2000. Timelærer ved BI – Bergen og UiB, i perioden 1988 – 2005.

Professor
Tore Langholm

Matematikk
tore.langholm@sksk.mil.no

Underviser i matematikk. Har hovedfag i matematikk fra Universitetet i Oslo 1983 og doktorgrad fra Stanford University 1987. Har tidligere vært ansatt som forsker ved Universitetet i Oslo, førsteamanuensis ved Universitetet i Bergen, og professor ved Universitetet i Oslo.

Førsteamanuensis
Yngve Thodesen

Elektronikk
ythodesen@sksk.mil.no

BSc i elektronikk ved Trondheim Ingeniørhøgskole (1983). MSc i elektronikk ved NTH (1986). PhD i elektronikk ved NTNU (1996). Jobbet i 22 år med høyfrekvent elektronikk design ved Nera. Jobbet der som design-ingeniør, senior-ingeniør og forsker. Var 1 år (1994/1995) invitert forsker ved Berkeley / California, der det ble samarbeidet med dr Ken Kundert om data-assistert elektronikk-design, såkalt CAD for elektroniske kretser. Underviser i dag i elektronikk ved Sjøkrigsskolen.

Høgskolelektor
Arild Sæbø

Elektrofag
arild.saebo@sksk.mil.no

Høyskolelektor innen elkraft og skipselektriske anlegg. Hovedoppgave innen undervisning og bestyrer for skolens elkraft- og høyspenningslaboratorier. Utdannet Sivilingeniør innen elkraft ved NTNU. Tjenesteerfaring som elektrooffiser i UVB-våpenet, teknisk saksbehandler elektro i FLO og disiplinleder elektro fregattprosjektet.

Høgskolelektor
Terje Fykse

Elektrofag
terje.fykse@sksk.mil.no

Utdannet sivilingeniør i elektro/automatisering. Ansatt som høyskolelektor ved Sjøkrigsskolen siden 1991, hvor jeg underviser i emner innen elektroteknikk, reguleringsteknikk, instrumentering og styringsteknikk.
Har jobbet som prosjektingeniør i Siemens før jeg begynte på Sjøkrigsskolen og i en periode jeg hadde permisjon herfra. Oppgaver i Siemens var innen automatisering for offshore, skip og prosessindustri. Jeg hadde bl.a. ansvaret for styring og overvåkning av skipstekniske systemer på Ula-klassen ubåter.

Førsteamanuensis
Alexander Sauter

Elektrofag
asauter@sksk.mil.no

Nyansatt som førsteamanuensis i elektrofag siden August 2016. Har undervist elektroteknikk som timelærer i 2015 og underviser nå sensorteori i høst 2016. Brei tverrfaglig grunnutdanning innen realfag med Diplom (tilsvarende master) i fysikk og tilleggssertifikat i biofysikk fra Universitetet i Heidelberg, Tyskland. Tok ph.d. utdanningen ved Universitetet i Bergen i fagområdet mellom immunologi, materialvitenskap og nanoteknologi med fokus på metodeutvikling. Jobber fortsatt som postdoktor innen nanotoksikologi ved UiB til og med Oktober 2016 med fokus på automatisk dataanalyse og metodeutvikling innen nanotoksikologi, mikrofluidiske systemer og bioimpedans.

Høgskolelektor
Gisle Strand

Skipsteknikk
gisle.strand@sksk.mil.no

Høyskolelektor innen maskin – og skipstekniske fag. Hovedoppgave innen undervisning og bestyrer for skolens maskintekniske laboratorier. Utdannet Marineingeniør ved Sjøkrigsskolens maskinlinje og Sivilingeniør innen hydrodynamikk og konstruksjon ved NTNU. Etterutdanning innen marinefartøyers konstruksjon og overlevelsesevne ved MIT/US Navy. Tjeneste som maskinoffiser i MTB- og Fregattvåpenet og som marineingeniør ved skrogkontoret til Sjøforsvarets Forsyningskommando (SFK).

Kapteinløytnant
Nina Karin Mo Wahlund

Lærer Skipstekniske fag
ninakarin.wahlund@sksk.mil.no

Lærer i skipstekniske fag ved Sjøkrigsskolen. Utdannet ved Sjøkrigsskolen (1998-2001) og NTNU Marin Teknikk (2005-2008). Tjenesteerfaring fra fregatt. Underviser med hovedvekt i tekniske spesialiseringsemner for kadetter med fordypning i maskinfag ved Sjøkrigsskolen.

Førsteamanuensis
Harald Totland

Fysikk og matematikk
harald.totland@sksk.mil.no

Diplom i fysikk (Diplom-Physiker) ved Universität Freiburg, Tyskland (1994). Doktorgrad i fysikk (dr. scient.) ved Universitetet i Oslo (1999). Tidligere ansatt som førsteamanuensis ved Høgskolen i Bergen, Avdeling for lærerutdanning, Seksjon for matematikk fagdidaktikk (1999-2000). Ansatt ved Sjøkrigsskolen siden 2000, underviser i emner innen generell fysikk, statikk og fasthetslære, fluidmekanikk, elektromagnetisme, sensorteori, ballistikk og matematikk.

Førsteamanuensis
Chistophe Massacand

Fysikk/matematikk
christophe.massacand@sksk.mil.no

Sivilingeniør i fysikk og matematikk ved NTNU (1998), PhD i fysikk ved NTNU (2008). Har jobbet som postdoc ved Yale University i USA, Niels Bohr Institutet i Danmark og Universitetet i Oslo. Underviser i fysikk og elektronikk ved Sjøkrigsskolen. Driver også forskning i teoretisk fysikk med hovedvekt på mekaniske systemer i kvanteregimet og kvanteoptikk, som er motivert både av muligheter for utvikling av ny teknologi og av fundamentale spørsmål vedrørende kvantefysikk.

Førsteamanuensis
Lars Olav Tveita

Fysikk/EDB
lars.olav.tveita@sksk.mil.no

Cand real og lektor i fysikk frå Universitetet i Bergen (1971). Har jobba som stipendiat ved Fysisk Institutt, UIB , som høgskolelektor ved Stord Lærarhøgskole og som lektor ved Bergen katedralskole. Underviser i fysikk og datateknologi på Sjøkrigsskolen.

Førsteamanuensis
Kjetil Børkje

Fysikk
kjetil.borkje@sksk.mil.no

Sivilingeniør i fysikk og matematikk ved NTNU (1998), PhD i fysikk ved NTNU (2008). Har jobbet som postdoc ved Yale University i USA, Niels Bohr Institutet i Danmark og Universitetet i Oslo. Underviser i fysikk og elektronikk ved Sjøkrigsskolen. Driver også forskning i teoretisk fysikk med hovedvekt på mekaniske systemer i kvanteregimet og kvanteoptikk, som er motivert både av muligheter for utvikling av ny teknologi og av fundamentale spørsmål vedrørende kvantefysikk.

Avdelingsingeniør/laborant
Frode Wikne

Laboratoriumstekniker
fwikne@sksk.mil.no

Jobber med det meste innen laboratoriene. Fagbrev som kjølemontør (2000), Utdanning maskiningeniør fra HiB (2004-2007). Jobbet med kjemi, prosess og mekanisk samt 3D modellering (ProEngineer) i Weyland AS (2007-2013), Jobbet med prosessanlegg og 3D modellering (SolidWorks) i AMOF Fjell Prosess Technology AS (2014-2015).

→ Innholdsfortegnelse

DEL 1

Innledning

Teknologiavdelingen (TEK), en «sivil» eller «militær» avdeling?

Ellen Margit Krätzig-Berle

I Danmark valgte man for et par år siden en modell, der man først blir kadett etter et avsluttet bachelorstudium. Det betyr at den akademiske delen av utdanningen er adskilt fra den militære opplæringen. På Sjøkrigsskolen utdanner man, som navnet tilsier, sjøoffiserer som også har akademiske fag på timeplanen og som gjør at teknologiutdanningen er en integrert del av det å bli offiser.

Teknologiavdelingen på Sjøkrigsskolen omfatter personell som har som hovedoppgave å undervise kadettene i teknologiske fag og realfag. Avdelingen består for tiden av en avdelingsingeniør, fire høgskolelektorer, to førstelektorer, seks førsteamanuenser, en dosent og en professor.

«Har du lyst til å bli en moderne og handlekraftig leder? En lederutdanning ved Sjøkrigsskolen gir deg tyngden du trenger for å mestre utfordrende, interessante og ansvarsfulle lederstillinger.»

Dette kan man lese i innledningen til Sjøkrigsskolens utdanningssider på internett. Hvordan passer så teknologi inn i dette konseptet? Spørsmål som stadig oftere dukker opp er: Trenger vi en egen teknologiavdeling på Sjøkrigsskolen? Trenger vi lærere som underviser i matematikk, fysikk og mekanikk? Dette er jo fag som også finnes på sivile høgskoler. Kan de egentlig oppfattes som både sivile og militære fag?

En ferdig utdannet offiser fra Sjøkrigsskolen skal være en god leder og en dyktig sjømann med akademiske ferdigheter og fagspesifikk kunnskap. Studiet på Sjøkrigsskolen er bygget opp slik at kadettene allerede i starten vil kunne finne ut om de har valgt rett yrke. Nesten alle kadettene, bortsett fra dem som går LOG- eller OMJ-linjen, starter det første semesteret ved skolen med mange tunge realfag og vil tidlig i utdanningen få svar på om de vil greie å gjennomføre en slik tung faglig utdanning. Påfølgende semestre er både seilskutetoktet og øvelsen TELEMAKOS sentrale i utdanningen. Der testes sjømannskap og soldat- og lederegenskaper, og de utfordrer kadettene på yrkesvalget. På denne måten får man tidlig testet de tre kjerneområdene, som en offiser i den norske Marinen bør være godt skikket i.

Etter endt studium vil alle kadetter oppnå en bachelorgrad i militære studier. I løpet av utdanningen vil i tillegg alle få mer undervisning i teknologiske fag og realfag av forskjellig intensitet, avhengig av hvilken linje de gå på.

TEKNISK LINJE

Kadettene på maskin-, elektro/automasjon- og elektronikk/data -linjen har i sin utdanning så mange realfag at de etter endt utdanning også vil oppfylle Forskrift om rammeplan for ingeniørutdanning. Slik vil de kunne kalle seg ingeniører.

Ordet ingeniør … er avledet av ingenium som på latin betyr «begavelse, oppfinningsevne» og i middelalderlatin «(krigs)maskin». … Begrepet ingeniør er kjent fra 1500-tallet i Italia og Spania og ble den gang brukt om militære spesialister som bl.a. forsto byggverk. Mot

slutten av 1700-tallet oppstod det et sivilt ingeniøryrke med bakgrunn i en teoretisk, teknisk utdanning[1].

Fra gammelt av er altså ingeniørene å regne som militært personell, og en teknologiavdeling for 500 år siden hadde helt sikkert vært ansett som en ren militær avdeling.

I forrige utgave av Necesse skriver Odd Sveinung Hareide og Frode Voll Mjelde i forordet: «Dagens militære fartøyer er avanserte skrog med høyteknologiske sensorer og integrerte systemer som skal fungere i høye hastigheter i krevende operasjonsområder.»[2]

Dette er en god beskrivelse for hvordan offisersutdanningen på Sjøkrigsskolens tekniske linjer er bygget opp. Det er et veldig finstemt maskineri. I løpet av tre og et halvt år vil teknikerne sammen med kadettene på de andre linjene (operativ marine og logistikk) lære seg profesjonsfagene som gjør dem i stand til å utøve sitt yrke som offiser og befal. Derfor er det særdeles viktig at kadettene øver seg i å være en del av den militære konteksten. Vitnemålet etter endt utdanning bekrefter da også at de har en bachelor i militære studier.

Etter utdanningstiden på SKSK og en del fartøyspesifikke kurs vil de fleste kadettene gå om bord på fartøy som inneholder de mest moderne systemene. Sjøforsvarets fartøyer er våpenplattformer med stor grad av kompleksitet, og de avanserte våpensystemene ombord krever meget gode kunnskaper innen grunnleggende realfag. I tillegg kreves tekniske anvendelsesfag og tradisjonelle elektronikk- og datafag og fag som har å gjøre med fartøyets flyteevne, mobilitet og kraftforsyning. Derfor er teknologi- og realfagene på Sjøkrigsskolen spesialdesignet for å kunne tilfredsstille behovene til drift og vedlikehold.

Dette vises i første omgang i det faglige innholdet. Emneplanene gjenspeiler helt og holdent Sjøforsvarets behov. Kompendier utarbeides med tanke på de spesielle anvendelsesområdene og trening og laboratoriumsøvelser skjer i nær tilknytning til fartøyenes systemer.

Det andre viktige aspektet er tiden. Måten fagene bygger på hverandre, en unik nærhet mellom lærer og elev og en ellers tilrettelagt kadetthverdag, gjør det mulig å få til både en bachelor i militære studier og en «sivil» ingeniørtittel i løpet av syv semestre. I tillegg skal maskin- og elektroutdannede kadetter tilfredsstille STCW-kravene for å kunne løse maritime sertifikater. Dette innebærer blant annet en god del verkstedkurs som utføres stort sett i Sjøforsvarets egne verkstedanlegg og som man langt på vei også finner plass til i løpet av denne tiden.

OPERATIV LINJE

Realfagsundervisningen på operativ linje er naturlig nok noe mindre intensiv enn på de tekniske linjene. Til gjengjeld er den fullstendig spesialdesignet for disse to linjene; emnene som undervises på Sjøkrigsskolen, vil man slik ikke kunne finne andre steder. Når det gjelder operativ marine (OM), er matematikkundervisningen koordinert med kravene til nautikkfagene og STCW, og faget sensorteori er spesialtilpasset kadettenes fremtidige yrke om bord på marinefartøy.

På linjen for maritime jegeroperasjoner, OMJ, undervises det i to realfag, ballistikk og sensorteori/samband, som er utviklet for nettopp denne linjen, der matematikk og fysikk danner grunnlaget for å forstå det tekniske utstyret og fysiske omgivelser.

LOGISTIKK-LINJE

Realfagsundervisningen på denne linjen består i et matematikkfag, statistikk og emnet operasjonsanalyse. Innholdet i alle disse emnene er utrettet mot de spesielle kravene som kadettene på denne linjen vil møte i sitt fremtidige virke.

LABORATORIER, SKOLEFARTØY OG VERKSTED

Etterhvert har Sjøkrigsskolen stadig sett behovet for å utvide mulighetene for at kadettene får mer praksis, «hands on» er en viktig del av all undervisning. Laboratoriene som finnes på området, og muligheten kadettene har for å få instruksjon på Sjøforsvarets egne verksted, gir en unik mulighet til å bli kjent med de systemene som de skal forvalte når de kommer ut i tjeneste. Like viktig er det å ha anledning til å bruke skolefartøyene, for eksempel i faget «Skipsteknisk seilas».

UNDERVISNINGSPERSONELL

Sjøkrigsskolen har status som høgskole og er med dette underlagt høgskoleloven. Denne stiller høye krav til undervisningspersonellet. Det betyr blant annet at et bærekraftig fagmiljø må eksistere på institusjonen. Dette bør sikre en faglig utvikling av lærerstaben. Minstekravet til en lærer er å inneha masterkompetanse, og man er pålagt å drive forskningsbasert undervisning. Staben i TEK er liten, men p.g.a. mye og variert tung fagkompetanse er den forholdsvis robust. Som allerede beskrevet tilfredsstiller lærerne langt på vei kravet om høy kompetanse. All forskning og utvikling (FoU) som drives innenfor eget fagfelt, selv ikke med umiddelbar relevans for Sjøforsvaret, vil være tjenlig for undervisningen og vil på denne måten komme kadettene og Sjøforsvaret til gode.

Spesielt og meget viktig for fagmiljøet på SKSK er det også at en del av lærekreftene er rekruttert fra Sjøforsvaret, nettopp for å kunne opprettholde nærheten til miljøene på fartøyene og for å garantere relevansen i utdanningsenhetene.

KONKLUSJON

Konklusjonen må være at TEK også nå, 500 år etter at ingeniørbegrepet ble innført, må kunne betegnes som en militær avdeling. De aller fleste emnene som undervises på Sjøkrigsskolen, undervises med en grunnfestet forståelse av at elevene er kadetter på en militær skole. Mange av fasilitetene, så som laboratorier, kompendier ol, er blitt til på bakgrunn av behovet Sjøforsvaret har, og undervisningen blir stadig innrettet mot kravene som Sjøforsvaret stiller. Målet er å være et kompetansesenter for teknologi-utdanning i Sjøforsvaret og Forsvaret. Det gjelder å fortsette å utdanne militære ledere med høy teknisk kompetanse og innsikt i operasjonell virksomhet. Sivile ingeniører med et kurs i militært lederskap får ikke den samme kompetansen. Nøkkelen til suksess ligger i måten profesjons- og fagutdanningen er flettet sammen på.

KILDER

1 https://no.wikipedia.org/wiki/Ingeni%C3%B8r

2 Necesse, Royal Norwegian Naval Academy Monographic Series, volume 1, issue 1, 2016

Matematikken på Operativ Marine siden 1976

Dagfinn Andreassen

Sjøkrigsskolen har hatt 4 skoleordninger siden 1976, og nå skal vi snart starte arbeidet med den femte. I denne artikkelen ser jeg på matematikken for Operativ Marine gjennom disse 40 årene, og jeg har noen betraktninger om matematikken i den kommende skoleordningen.
En spesiell takk til OK (P) Fredrik Thuesen, som har full kontroll på alle dokumenter og alt som har skjedd på Sjøkrigsskolen siden tidenes morgen.

Sjøkrigsskolen (SKSK) fikk en ny skoleordning i 1976, og hoderegning tilsier at det ikke finnes noen tjenestegjørende offiserer i Sjøforsvaret som har sin utdannelse under tidligere skoleordninger. Jeg velger derfor 1976-ordningen som startpunkt når jeg ser på utviklingen i timetall, forkunnskaper og pensum i matematikk.

Sannsynlighetsregning og statistikk har til dels vært egne kurs, til dels integrert i matematikken. I mine oversikter betrakter jeg sannsynlighetsregning og statistikk som en del av matematikken, uavhengig av om det var egne kurs eller ikke.

I denne artikkelen er det bare Operativ Marine som er tema. Operativ Kystartilleri uteksaminerte sitt siste kull i 2002, og nyskapningen OMJ, Operativ maritime jegeroperasjoner, har matematikken integrert i emnene Ballistikk og Sensorteori.

I 2005 satte jeg opp en oversikt over timetall og pensa i matematikk under de forskjellige ordningene[(1)], og dosent Vold og jeg lagde et felles, kortere notat om timetall og forkunnskaper for matematikk og fysikk på operativ bransje[(2)]. Disse to notatene er viktige kilder.

SKOLEORDNINGER 1976 OG SENERE

Siden 1976 har den offisielle studielengden variert fra dagens topp på 3,5 år til den reviderte befalsordningen med 2 år for nesten alle. Den reviderte befalsordningen hadde også en 2-årig KS2, men antallet elever her var så lite at det hadde ingen praktisk betydning.

Kilden for oversikten på neste side er et notat[(3)], utarbeidet av dekan Rikstad og leder studieadministrasjon, OK Thuesen.

KVALITATIVE SKILLER: STUDIERETNINGER OG OPPTAKSKRAV, KS 2

Artiumsordningen i 1976 brakte inn en nyskapning: OM (og OK) ble delt i studieretningene R og S, realfaglig og samfunnsfaglig. Siden OMR og OKR hadde identisk matematikk, ditto for OMS og OKS, bruker jeg i denne artikkelen de tradisjonelle studieretningsbetegnelsene OR og OS.

OR var en videreføring av eksisterende ordning, den krevde full fordypning i matematikk. OS derimot, krevde bare grunnkurs i matematikk, og da jeg begynte som lærer på SKSK i 1980, ble jeg fortalt at den hovedsakelig ble innført for å lette rekrutteringen.

START	1976	1986	1996	2003
Navn	Artiumsordning	Revidert befalsordning	Ordningen av 1996	Høgskole-ordningen
Varighet år	3	2	3	3,5
Studieretninger OR og OS?	Ja	Ja	Nei	Nei
KS2?	Nei	Med studie-retninger	Uten studie-retninger	Nei

Studieretningene ble beholdt i 1986, men forsvant med skoleordningen av 1996.

Den nye studieretningen, Operativ Samfunnsfaglig, hadde drastisk redusert opptakskrav i matematikk, kun grunnkurs.

I 1996, da studieretningene forsvant, ble opptakskravet satt til 2 år matematikk på videregående, i dagens terminologi blir det R1. Dette opptakskravet er senere beholdt, men skolen har i alle år tatt opp kadetter som ikke tilfredsstiller kravet. I perioder har skolen kjørt forkurs for kadetter som ikke tilfredsstiller opptakskravene i matematikk og/eller fysikk.

I den reviderte befalsordningen hadde man også en 2-årig øvre avdeling, SKSK 2, med deling i realfaglig og samfunnsfaglig. Den bygget på fullført (2-årig) nedre avdeling, SKSK 1, og siden den hadde omtrent like mye matematikk som nedre avdeling, ga den et betydelig kvalitativt løft for begge studieretningene.

Men det var svært få som fikk gå KS2. Man uteksaminerte totalt 31 kadetter i årene 1990-96, fordelt på 7 realfaglige og 24 samfunnsfaglige. I samme periode uteksaminerte man 176 kadetter på KS1[4]. Jeg velger derfor å se bort fra KS 2 i videre oversikter.

KVANTITATIVE SKILLER: TIMETALL

Lengden på utdannelsen har variert. Den reviderte befalsordningen i 1986 ga oss en 2-årig Sjøkrigsskole. (Jeg velger altså her å se bort fra den lille andelen som fikk gå 2 ekstra år på SKSK 2.) Dagens skole er på 3½ år.

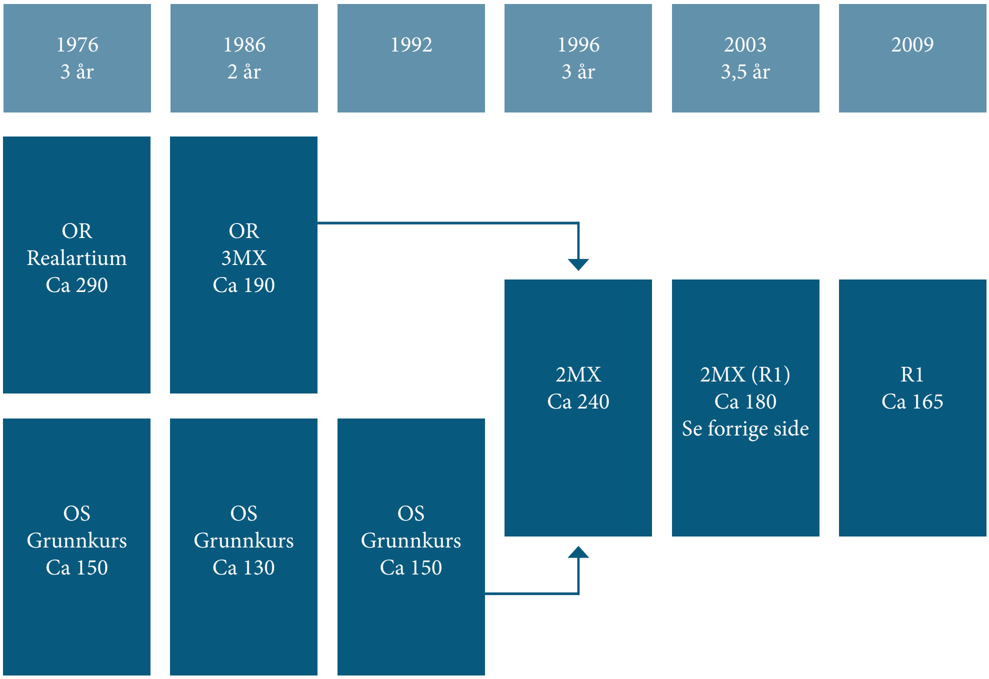
Figuren på neste side viser utviklingen i timetall og opptakskrav.

Timetallene er anslag på hvor mange timer læreren er tilstede i klasserommet, basert på uketimer og standard semesterlengde på 15 uker.

Men dette er anslag. For det første er «standard semesterlengde» et meget tøyelig begrep. Og for det andre dukker det alltid opp ting som gjør at undervisningstimer forsvinner.

I særdeleshet gjelder det timetallet 180 for ordningen av 2003. Det var semestre hvor OM0 i praksis bare hadde 12 uker, så 160 er et mer realistisk tall.

I perioden med ordningen av 1996 var det mulig for kadetter med 3MX å heller følge fagplanen til teknisk bransje. Dette ble gjort av et lite antall kadetter.



Figuren viser utviklingen i timetall og opptakskrav.

Dagens kadetter har klart mindre matematikk enn gårsdagens OR, og tendensen har vært en jevn reduksjon. Økningen i timetall fra OR i 1986 til udelt operativ i 1996 ble mer enn spist opp av at inntakskravet fra videregående ble redusert.

På den annen side er våre kadetter langt bedre stilt enn de som gikk OS. Timetallet vårt er litt høyere enn det var for OS, men den reelle forskjellen er stor, våre kadetter har ett år mer matematikk fra videregående skole.

UTVIKLINGEN I PENSUM

Matematikk på Operativ Realfaglig var i sin helhet postgymnasial, mens matematikken på Operativ Samfunnsfaglig tilhørte videregående skole. Siden 1996, med opptakskrav 2MX eller R1, har man dekket deler av tredje år videregående (3MX eller R2), og så fylt på med emner utenfor videregående skole.

Fra mitt notat, ref (1), har jeg detaljene for linjedelt KS1 i mars 1992, og vi ser tydelig den enorme forskjellen i faglig nivå (se tabell på neste side).

DAGENS SITUASJON

Hovedmengden av våre kadetter har R1. Vi har også en betydelig (men varierende) andel som har R2, med til dels gode karakterer. Og dessverre kommer det også en og annen som ikke tilfredsstiller opptakskravet.

Undervisningen tar utgangspunkt i opptakskravet. De fleste med gode karakterer i R2 søker om og får fritak for undervisning og eksamen, de uten R1 får helt klart en ekstra belastning.

Kurset er todelt. Vår OM0 kan beskrives som R2 med noen utelatelser og noen tillegg. Høst OM2 er i sin helhet viet emner tilpasset studiet og krav utledet fra STCW-konvensjonen.

- OM0
  - 5,5 uketimer
  - 6 studiepoeng
- OM2
  - 5,5 uketimer
  - 6 studiepoeng

Den videregående skoles nyeste læreplan er fra 2005. Mange av de emnene som den gang ble fjernet, er ansett som nyttige og nødvendige for våre kadetter. Så selv om kurset i OM2 kun inneholder emner som ikke er dekket i den nye læreplanen, er realiteten at vi i det alt vesentlige bruker læreboken i 3MX.

	OR	OS
LÆREBØKER	• Log, «Matematikk for Ingeniørhøgskolen», Bind I og II • Midttun: Notat «Litt om Fourierrekker» • Høyland, «Sannsynlighetsregning og statistisk metodelære, del I»	• Erstad og Bjørnsgård, «Matematikk 2MN», «Matematikk 3MN» • Øvsthus: Notater «Vektorer» og «Simpsons formel» Erstad og Bjørnsgård, «Sannsynlighetsregning»
PENSUM	• Deriverte, partielle deriverte, differensialer • Bestemt og ubestemt integral, integrasjons-metoder (mye!) • Anvendelser: Areal, volum, overflate, moment, kurvelengde • Funksjonsdrøfting (mye), inverse funksjoner • Rekker, inklusive Taylor og Maclaurin • Vektorer, med skalarprodukt og vektorprodukt. Vektorfunksjoner • Komplekse tall • Differensialligninger: Separable, 1. ordens lineære, 2. ordens lineære med konstante koeffisienter • Fourierrekker: Jevne og odde funksjoner. Kompleks form. Derivasjon og integrasjon	• Funksjonsdrøfting, inverse funksjoner • Trigonometri • Deriverte • Integral, integrasjonsmetoder, areal og volum • Litt vektorregning
	• Sannsynlighetsregning: betinget sannsynlighet, uavhengighet, Bayes formel • Fordelinger: Normal, uniform, binomisk, hypergeometrisk, Poisson • Annet: Ekstremvariable, ventetid i Poisson	• Deskriptiv statistikk • Sannsynlighetsregning: addisjon, multiplikasjon, uavhengighet, antall hendelser. • Fordelinger: Normal, binomisk, hypergeometrisk

Jeg tar utgangspunkt i R2 fra videregående skole, og da kan dagens kurs beskrives som følger:

- Med i R2
  - o Integralregning og integrasjonsmetoder
    - Bestemt og ubestemt integral
    - Areal og volum.
    - Variabelskifte og delvis integrasjon
  - o Trigonometri og trigonometriske funksjoner
    - Generelle definisjoner
    - Trigonometriske ligninger
    - Egenskaper ved sinus, cosinus og tangens
    - Derivasjon
  - o Vektorer i rommet
    - Skalarprodukt, vektorprodukt, determinanter
  - o Differensialligninger
    - Førsteordens lineære, separable
    - Annenordens lineære og homogene med konstante koeffisienter
- Utelatt fra R2
  - o Romgeometri
  - o Følger og rekker
- I tillegg til R2
  - *o Tyngdepunktsberegning, Pappus' regel.*
  - *o Inverse trigonometriske funksjoner*
  - *o Kjeglesnitt*
  - o Numerisk integrasjon
  - o Kurver og vektorfunksjoner
    - Polarkoordinater, fart og akselerasjon, buelengde
  - o Sannsynlighetsfordelinger
    - Forventning og varians
  - o Statistikk
    - Normalfordeling, sentralgrenseteorem, konfidensintervall, normal som tilnærming til binomisk

Tyngdepunktsberegning, numerisk integrasjon og statistikk er med pga ønske fra lærer i nautiske fag. Inverse trigonometriske funksjoner, kjeglesnitt og polarkoordinater er med fordi kunnskaper kreves i det relevante IMO modellkurset.[5]

De tre punktene som er i kursiv, er de eneste som med rimelighet kan kalles postgymnasial. De tar vel 5% av undervisningstiden. Alt annet stoff er hentet enten fra R2 eller fra forgjengeren 3MX.

TEKNISKE HJELPEMIDLER: HVOR MYE HJELPER DE?

Kadettene i 1976 hadde ikke kalkulator, de brukte tabeller over logaritmer og trigonometriske funksjoner. Kalkulatorene drepte både tabeller og regnestaver, elever sparer en god del tid i det trivielle regnearbeidet. Til gjengjeld virker det som om noe grunnleggende forståelse for funksjonsbegrepet er borte. Vi blir ganske vant til å se forkortinger av typen $\frac{\sin 2x}{2} = \sin x$ og mange elever «ganger med ln» heller enn å si at «de tar logaritmen».

Graftegnere som GeoGebra gjør det lettere å se hvordan en graf går. Den teoretiske matematikken legger vekt på å kunne analysere den deriverte og andrederiverte, GeoGebra bør kunne gi elever en aha-opplevelse når de ser teorien i praksis.

Våre kadetter bruker en kalkulator, TI-86, som integrerer og deriverer analytisk. Kurset vårt legger derfor liten vekt på de klassiske integrasjonsmetodene substitusjon, delvis integrasjon og delbrøkoppspalting. Vi dekker ikke delbrøk, og de to andre metodene har bare en ganske rask introduksjon. Her gir kalkulatorteknologien reelle tidsbesparelser, kadetten av 1976 brukte mye tid på forskjellig subtile substitusjoner.

FOR MYE, FOR LITE ELLER AKKURAT PASSE?

Timetall og pensum har variert sterkt gjennom årene. Og det virker ikke som om det er noen kobling mellom mengden av matematikk og evnen til å gjøre karriere i Forsvaret: Dagens Forsvarssjef er Operativ Samfunnsfaglig, dagens GIS er Operativ Realfaglig.

Kadettene har matematikk fordi det til en viss grad er nødvendig i daglig tjeneste, og fordi nautiske fag og realfag krever matematiske kunnskaper.

I en nylig publisert undersøkelse[6] svarer de nyutdannede operative offiserene på spørsmålet «I hvilken grad har følgende bransjefag vært relevant så langt i tjenesten?». For matematikken sin del er de 36 svarene fordelt som følger:

I svært liten grad	5,6%
I nokså liten grad	19,4%
Både/og	44,4%
I nokså stor grad	22,2%
I svært stor grad	8,3%

Man skal jo være forsiktig med å legge for mye i disse svarene, men det er i hvert fall ingen klar fordømmelse av matematikk som unyttig i den daglige tjeneste.
Matematikkens plass som støttefag er egentlig ganske grei. Skolen er så liten at vi snakker sammen, og det er ikke så veldig vanskelig å få et inntrykk av hva som kreves. Men det vil aldri være mulig å tilfredsstille alle ønskene, og én av årsakene til dette er:

Når jeg har laget planer i matematikk, har jeg hatt som prinsipp at når vi tar opp et emne (f eks polarkoordinater), skal vi gjøre det ordentlig, det skal ikke være snakk om å bare krysse av på en liste.
Så orakelsvaret er at vi har for lite tid til å tilfredsstille alle ønsker, og vi bruker mye mer tid enn det som er nødvendig for å gjøre en topp karriere i Forsvaret.

QUO VADIMUS?

Nå skal skoleordningen legges om, vi skal tydeligvis kutte ett semester. Det betyr at alle fagene vil komme under lupen, og matematikken blir intet unntak. Vi får sikkert diskusjoner hvor to ytterpunkt for faglige krav er «dette skal de kunne» og «dette skal læreren ha nevnt».
Timetall og gjennomføring vil sikkert bli diskutert, med henblikk på å frigi tid. Den frigitte tiden kan jo brukes til å ta inn nytt stoff for å heve den faglige standarden, eller den bare går inn i regnestykket når ett semester skal fjernes.
For matematikken på Operativ Marine ser jeg følgende muligheter:

Beholde dagens opptakskrav, dvs R1.

- Tid vil bare kunne frigies ved en nådeløs kutting av alle ikke-essensielle emner og en bedre og mer effektiv undervisning.
- Da må «essensielle» emner identifiseres. Det krever at brukerfagene identifiserer sine essensielle emner og ut fra det stiller krav, det blir ikke nødvendigvis enkelt.. «Bedre og mer effektiv undervisning» er også ofte lettere sagt enn gjort.
- Det krever en viktig prinsipiell avklaring: skal vi favne vidt og overfladisk, eller skal vi satse på forståelse i færre emner.
- Jeg vil ikke forsøke å tallsette noen mulig gevinst, det blir bare en øvelse i å tenke på et tall.

Beholde R1 som krav, men sette en karaktergrense.

- Det vil klart gjøre det mulig å øke tempoet og dermed frigi tid.
- Denne tiden kommer i tillegg til eventuell gevinst fra punktet over.
- Det vil redusere mulig søkermasse: Ved eksamen i 2015 fikk 23,3% karakteren 2 og 25,0% fikk karakteren 3[7]. Ifølge Utdanningsdirektoratet endrer disse tallene seg normalt lite fra år til år[1].

Øke opptakskravet til R2

- Det frigir automatisk matematikk første semester, altså dagens OM0, og det vil sikkert gjøre det mulig å øke tempoet.
- Potensialet for gevinst ved emnekutting er stort sett tatt ut, ett semester er fjernet. Emnene i det andre matematikksemesteret er alle sammen

[1] *Det er intet direktiv som styrer fordelingen av eksamenskarakterene, f eks med krav om normalfordeling. Men det gjennomføres en forhåndssensur av et utvalg besvarelser. Deretter gjøres det en vurdering av hvordan angjeldende eksamen har slått ut, og så blir sensorene henstilt om å tilpasse seg.*

valgt for å støtte opp under vår undervisning i andre fag.

- o Det vil ganske sikkert gjøre det mulig å gå fortere frem, vi slipper å ta høyde for kadetter som sluttet med matematikk etter en svak R1.
- o Det vil redusere mulig søkermasse med 25-30%. Den offisielle elevstatistikken[8] gir, per 1. oktober 2015.

	2013-14	2014-15	2015-16
R1	9618	9804	9228
R2	6616	7084	7001

Min mening er at det beste vil være å sette opptakskravet til R2. Det gir litt større reduksjon i søkermasse enn et minstekrav på 3 i R1, men det gir en umiddelbar og udiskutabel frigivelse av 6 studiepoeng matematikk. Det vil også ganske sikkert ha positive virkninger for undervisningen i tekniske og nautiske fag.

KILDER

(1) Dagfinn Andreassen, «Matematikk og statistikk/ sannsynlighetsregning for operativ bransje», 2005-08-15

(2) Dagfinn Andreassen, Per Vold, «Realfag for operativ bransje», 2005-08-15.

(3) «SJØKRIGSSKOLENS ORDNINGER», 2013-04-10, filbane SSK SKSK\STUDIEADMINISTRASJON\GOU Diverse\Historiske data\Sjøkrigsskolens ordninger revidert

(4) «Uteksaminerte fra Sjøkrigsskolen fra 1990-2000», udatert, filbane SSK SKSK\STUDIEADMINISTRASJON\GOU Diverse\Historiske data\Uteksaminerte fra SKSK fra 1990-2000

(5) IMO MODEL COURSE 7.03, «OFFICER IN CHARGE OF A NAVIGATIONAL WATCH. 1999 Edition". APPENDIX 1 - MATHEMATICS

(6) Roar Espevik og Jan O. Jacobsen, Etterundersøkelsen 2016

(7) Utdanningsdirektoratet. Foreløpig karakterstatistikk eksamen våren 2015

(8) Utdanningsdirektoratet. Statistikkportalen. Elever - fag

DEL 2

Pedagogikk og anvendelser

→ Innholdsfortegnelse

Undervisning og digitale verktøy

Arild Sæbø

Innføring av Surface PC og Office 365 utvider den pedagogiske verktøykassen til lærerne på Sjøkrigsskolen. Det kreves opplæring og endring i undervisnings-metoder. Gevinsten er bedre kvalitet, fleksibel og mer effektiv undervisning.

Flere lærere ved teknologiavdelingen på Sjøkrigsskolen har tatt i bruk nye digitale verktøy i undervisningen. Ambisjonen er å gjøre undervisningen mer tilgjengelig og gi økt læring på en effektiv måte. Satsningen er en del av «den digitale skole» prosjektet på Sjøkrigsskolen.

Prosjektet er delt inn i flere faser og har startet med opplæring av ansatte og kadetter i bruk av en rekke digitale verktøy. Disse gir gode muligheter til å produsere digitalt innhold, for eksempel undervisningsvideoer og tester/quizer. Innholdet kan brukes til å støtte opp om klasseromsundervisningen.

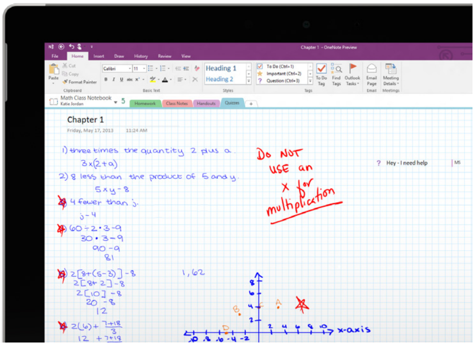
Det neste steget vil være å tilby omvendt undervisning. Dette innebærer at kadettene gjennomfører hele eller deler undervisningen hjemme og har oppgaveløsning og gruppearbeid på skolen. Det er gjennomført en rekke studier som viser at omvendt undervisning gir økt læring[1]. Den nye teknologiengjør det mulig å gjennomføre synkron fjernundervisning og nettundervisning. Lærer da kan undervise på en digital plattform uavhengig av lokasjon til kadettene. Dette vil være med på å øke fleksibiliteten og effektiviteten i utdanningsløpet både for lærere, kadetter og Sjøforsvaret.

NYE DIGITALE VERKTØY

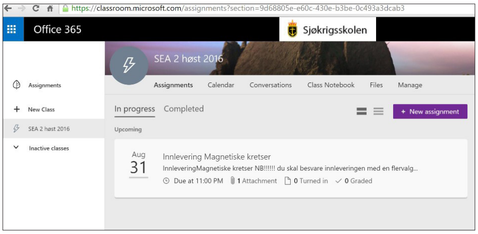
I første omgang handler det om å øke den digitale kompetansen for den enkelte lærer. Det er mye nytt å sette seg inn og de fleste lærerne bruker et semester til å bli kjent med de nye verktøyene. Under presenteres en del av disse.

Hovedverktøyet Sjøkrigsskolen har valgt for digitalisering av undervisningen er tablet PC'en Surface Pro 4, se bilde 1. Dette er en kraftig PC med berøringsskjerm og digitalpenn. I klasserommet kobles den opp via en trådløs overføring til lysprosjektor og på kontoret settes den i en dokkingstasjon. Surface PC funger godt sammen med Office 365.

Bilde 1: Suface Pro 4 med tastatur og digital penn (foto: Microsoft)



Bilde 2: Class Notebook kan brukes av elevene til å ta notater og læreren kan gi tilbakemeldinger (foto: Microsoft)



Bilde 3: Classroom brukes til å administrere klassen og læringsprosessen (skjermdump)

Office 365 har i tillegg til de vanlige office applikasjonene en rekke nye verktøy. I klasserommet brukes Class Notebook(klassenotatblokk)[2], kadettene får overført alt læreren skriver/presenterer i løpet av noen sekunder på sin egen PC. Hver kadett har en privat notatblokk (bilde 2) som deles med læreren. Lærere har tilgang til alle kadettnotatblokker, mens kadettene bare kan se sin egen. Det er mulig å lage interaktive leksjoner med lyd- og videoopptak. Med en klassenotatblokk er det enklere å samle inn hjemmearbeid og tester.

Ved å ta i bruk Microsoft Classroom[3] LMS (Learning Management System), får man en god integrasjon mellom klassenotatblokken, digitale filer, tester, innleveringer, testresultater og testverktøy. Oppfølgingen av hver enkelt kadett også blir lettere.

UNDERVISNING I KLASSEROMMET

Lærerne bruker sin personlige Surface Pro 4 og klassenotatblokken i klasserommet. Rommene er tilrettelagt for dette med hev og senke bord med strømforsyning og trådløs tilkopling til prosjektøren. Læreren skriver på Surface PC'en. Han kan stå vendt mot klassen hele tiden og slipper å stå foran tavlen og skygge for det som skrives. Det er lett å dele dokumenter med klassen via klassenotatblokken, dette kan gjøres på direkten i klasserommet eller før undervisningen starter.

Kadettene kan velge å følge undervisning direkte på sin egen PC og gjøre egne notater. Det er en fordel om studentene har egen Surface PC. Det tar bare noen sekunder fra læreren har skrevet noe i klassenotatblokken, før kadetten har dette på egen PC. Kadettene kan utheve innhold, kommentere på lysbilder, skissere diagrammer samt ta notater for hånd. Et typisk scenario er at en kadettene kopierer noe fra lærenes undervisningsområde og limer det inn i en inndeling i sin egen notatblokk. Ved sykdom og annet fravær vil kadettene ha tilgang til alt som er gjennomgått på skolen.

Kadettene ved Sjøkrigsskolen opplever at Class Notebook gjør lærestoffet mer oversiktlig og raskt tilgjengelig. Til sammenligning krever Itslearning (LMS) at hvert enkelt tavlenotat eller dokument må lastes opp etter undervisningen er ferdig, deretter må kadettene laste det ned fra itslearning.

DEN DIGITALE FREMTIDEN

Innføring av ny teknologi krever endring i måten læreren forbereder, underviser og følger opp kadettene på. Digitaliseringen av undervisningen gjør tavlenotater, kompendier, øvinger, løsninger, eksempler og presentasjoner alltid tilgjengelig og søkbar. Kadettene får nye muligheter å tilpasse lærestoffet til egen læringsstil.

Det overordnede langsiktige målet er å gi kadettene ved Sjøkrigsskolen mer effektiv læring. Ved å utnytte ulike digitale verktøy kan man i større grad tilpasse undervisningen til ulike læringsstrategier. Dette vil øke kvaliteten på undervisningen som igjen vil gi økt læring.

Teknologiavdelingen ved Sjøkrigsskolen har startet på en reise som kan føre til omvendt undervisning og synkron fjernundervisning. Dette vil være med på å øke fleksibiliteten og effektiviteten i utdanningsløpet både for lærer, kadett og Sjøforsvaret.

KILDER

[1] Louis Deslauriers, Ellen Schelew, Carl Wieman "Improved Learning in a Large-Enrollment Physics Class". Science 13 May 2011:Vol. 332, Issue 6031, pp. 862-864

[2] Onenote Class Notebook: http://www.onenoteinedu cation.com/

[3] Microsoft Classroom: https://classroom.microsoft.com/

Omvendt undervisning – noe for oss?

Terje Fykse

Kan *flipped classroom* eller *omvendt klasserom*, som metoden kalles på norsk, brukes hos oss ved Sjøkrigsskolen? Jeg skal kort sammenligne omvendt klasserom med tradisjonell undervisning og vise eksempler på hvordan jeg har brukt i undervisningen i elektroteknikk her ved skolen.

TRADISJONELL UNDERVISNING

I fig. 1 representerer de oransje boblene (3,4 og 5) hjemmearbeid, mens de blå (1, 2 og 6) er det som foregår i klasserommet sammen med lærer. Forløpet begynner med at nytt stoff (1) blir presentert i form av en forelesning. Graden av kommunikasjon mellom klasse og lærer kan variere, alt avhengig av stoffet som presenteres og hvor ivrig klassen er til å delta. Det siste beror gjerne på enkeltstudenter; det kan være utfordrende å dra flertallet med i diskusjonen. Som regel tiltar engasjementet i klassen når en går gjennom eksempler (2) eller når en går gjennom oppgaver som studentene har jobbet med hjemme (6). Derfor prøver jeg å veksle mellom forelesning, eksempler og oppgaver i timene; studentene får selvfølgelig også tid, både individuelt og i grupper, til å regne gjennom eksempler eller svare på spørsmål før gjennomgang i plenum.

OMVENDT UNDERVISNING

Dette må vel være den beste måten å undervise på? Metoden er innarbeidet og den har gitt resultater; de fleste studentene lander jo trygt til slutt. Men kanskje det er flere lærere som har de samme spørsmålene som jeg: Arbeidet vi gjør i klasserommet er grundig og effektiv, men hvor godt utnyttes tiden studentene arbeider utenfor klasserommet? Hvor mye får studentene med seg av det som skjer i klasserommet, tar de notater og bruker de notatene siden? Inntrykket (delvis underbygget av evalueringer som er gjennomført ved skolen) er at mange studenter hopper over punkt 3 og 5 i forløpet over. I elektroteknikken bruker man tiden til å løse oppgaver og helst i forbindelse med en innlevering eller i uken før eksamen. Hvis jeg ber studentene trekke frem hva de liker best ved klasseromsundervisning, sier de gjerne at det gir utbytte uansett om en er forberedt eller ikke og selv om en ikke er i form eller av andre grunner ikke henger med, er en velkommen til å delta. Forelesninger blir et «lavterskeltilbud». Det samme kan de ikke si om omvendt undervisning. Skal en ha utbytte av timene i klasserommet, må en ha gjort hjemmeleksen først.

Omvendt undervisning har først og fremst til hensikt å engasjere studentene i større grad på egen tid, ikke minst ved å pense dem inn på å forberede tiden vi har sammen i klasserommet best mulig. Det største utbyttet får vi gjennom kravene som stilles til studentene kontinuerlig. Det er ikke lenger bare krav om å levere noen oppgaver i ny og ne eller kunne løse eksamensoppgavene; det er et konstant krav om å gjøre en jobb mellom klassetimene og stille forberedt hver gang. Hele hensikten med omvendt undervisning er å snu opp ned på det gamle bildet: Man skal bruke undervisning fra video og andre medier på egen hånd. Tiden vi har sammen i klasserommet brukes til oppklaringer, diskusjon og gjennomgang av mer avanserte problemstillinger, med utgangspunkt i det hver og en har lært i forkant (fig. 2).

Fig. 1 Tradisjonell undervisning
Et forløp i tradisjonell undervisning av en leksjon (eller et kapittel) kan se slik ut:

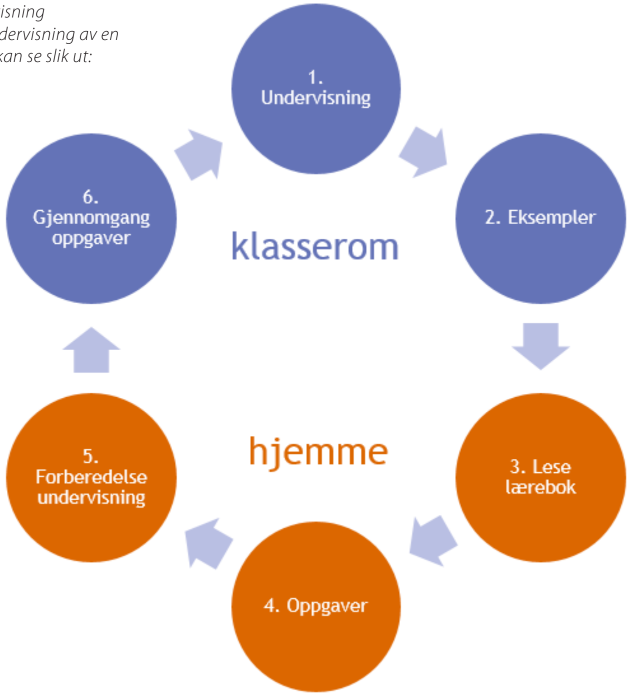
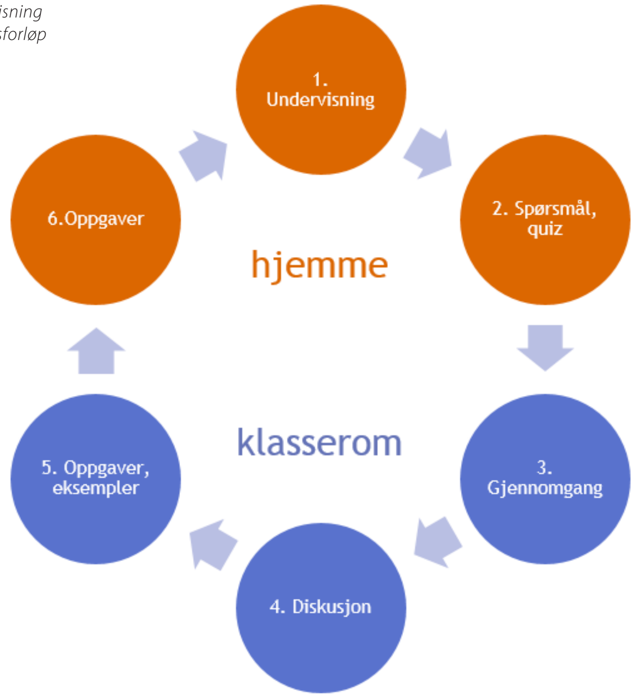
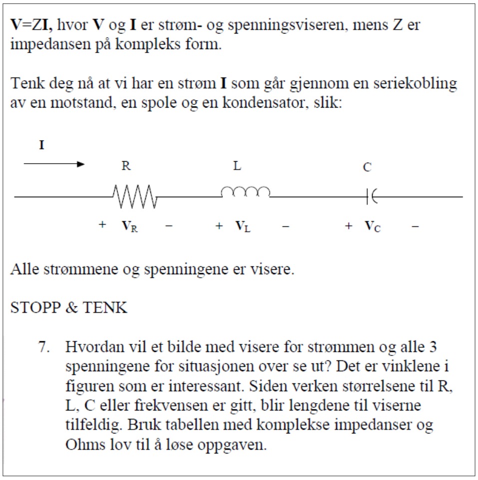


Fig. 2 Omvendt undervisning
Et omvendt-klasseromsforløp kan se slik ut:




V=**ZI**, hvor **V** og **I** er strøm- og spenningsviseren, mens Z er impedansen på kompleks form.

Tenk deg nå at vi har en strøm **I** som går gjennom en seriekobling av en motstand, en spole og en kondensator, slik:

Alle strømmene og spenningene er visere.

STOPP & TENK

7. Hvordan vil et bilde med visere for strømmen og alle 3 spenningene for situasjonen over se ut? Det er vinklene i figuren som er interessant. Siden verken størrelsene til R, L, C eller frekvensen er gitt, blir lengdene til viserne tilfeldig. Bruk tabellen med komplekse impedanser og Ohms lov til å løse oppgaven.

Fig. 3 Utklipp fra veiledning i elektroteknikk

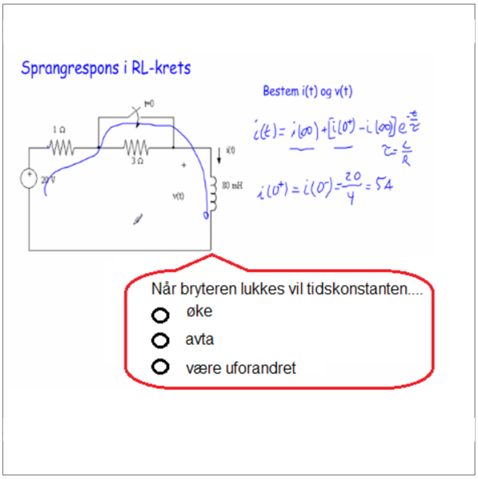


Fig. 4 Skjermdump fra video med integrert spørsmål

Også her representerer de oransje boblene (1, 2 og 6) hjemmearbeid, mens de blå (3, 4 og 5) representerer samlingene i klasserom. Den største forskjellen mellom den omvendte undervisningen og det tradisjonelle opplegget ligger i hvor presentasjonen av nytt stoff (selve undervisningen) foregår. Her ser vi at undervisningen er i oransje sone, den skjer altså før en møter i klasserommet.

Hvilken form kan denne undervisningen ha? Å lese et kapittel i en lærebok gir sjelden det store utbyttet; lærebøkene er stort sett laget til tradisjonell undervisning. De forutsetter at stoffet blir gjennomgått på andre måter i tillegg, gjerne i form av en forelesning og tradisjonell klasseromsundervisning med eksempler og oppgaver.

TEKSTBASERT MATERIALE

I omvendt undervisning blir nytt stoff gjerne presentert i videoer, men jeg vil også slå et slag for et annet medium: det skrevne ord (+ bilder og figurer). De som har tatt brevkurs i gamle dager vet hva jeg snakker om. Vi fikk gjerne en lærebok eller to når vi meldte oss på et kurs. Men minst like viktig var *studieveiledningen*, som enkelt sagt var undervisningen på trykt form. Studieveiledningen har sikte på å forklare innholdet i lærebøkene på en form som gjør det mulig for studentene å følge med uten en lærer tilstede. Av egen erfaring vet jeg at det ikke alltid er så lett å skrive en slik veiledning, men jeg har funnet ut at en nøkkel er å stille spørsmål som får studentene til å tenke og ikke slå opp eller google. Derfor kaller jeg disse spørsmålene for stopp & tenk-spørsmål (se utklipp fra en veiledning i elektroteknikk, fig. 3). Å stille denne typen spørsmål setter forhåpentligvis i gang en prosess hos studentene som fører til at de stiller egne spørsmål som vi kan diskutere når vi treffes i klassen.

VIDEO

Jeg har også prøvd mediet som de fleste forbinder med omvendt undervisning, nemlig video[1]). Å produsere en video er enkelt og tar kort tid. Her ligger den største fordelen med video i forhold til tekst, sett fra lærerens ståsted. Og det er like enkelt å lagre og distribuere video; selv har jeg brukt Youtube. Til produksjonen har jeg benyttet vanlig PC, men det beste er å bruke PC med touchskjerm, f.eks. Surface. Jeg har brukt Smart Notebook, som er programvaren til smartboardene i klasserommene, men jeg vil anbefale Camtasia Studio, som gir mulighet for redigering og for å legge til effekter som for eksempel zoom.

Videoene har form av korte forelesninger hvor jeg går gjennom nytt stoff og konkretiserer gjennom eksempler. Basert på tilbakemeldinger unngår jeg å lage videoer som er lengre enn 10-12 minutter. Men på samme måte som med de skriftlige veiledningene, er den største utfordringen å stille gode spørsmål. Akkurat som med veiledningene, har spørsmålene to hovedfunksjoner: De skal få studentene til å tenke samtidig som de skal danne en link til den påfølgende samlingen i klasserommet (som utgangspunkt for oppklaringer, nærmere forklaringer, diskusjon eller anvendelser til problemløsing). Jeg har ikke noen konkrete oppskrifter for hvordan man skriver slike spørsmål, men prøver hele tiden å tenke på at studentene skal *gruble* og ikke *google*. Det betyr som regel at spørsmålene er knyttet til en konkret problemstilling i undervisningen (et bestemt regnestykke eller en bestemt elektrisk krets). Jeg har også kommet frem til at de beste spørsmålene har en hypotetisk inngang (Hva skjer hvis….. i stedet for: Bestem verdien til…..)

Denne typen spørsmål bør integreres i videoene (f.eks. ved hjelp av verktøyene H5P eller EDPuzzle), se fig. 4. Jeg har også prøvd med frittstående quizer i its:learning. Ulempen her er at de må besvares for seg selv etter videoen; det er ikke lagt til rette for å flette dem inn.

Det som taler for selvstendige quizer, er at det da vanligvis er lettere å ta ut rapporter. Det er interessant for læreren å følge med på hvordan spørsmålene er besvart. Det kan naturligvis brukes i forberedelsene og gjennomføringene av samlingene.

Som nevnt finnes det verktøy som kan flette spørsmål inn i en video og rapportere svarstatistikk til lærer. Et system som har vært under utvikling i årevis og som ser ut til å dekke alle behovene i omvendt undervisning er Scalable learning-løsningen fra Uppsala universitet. I denne videoen[2]) går David Black Schaffer gjennom løsningen. Minst like interessant er gjennomgangen av ideen bak omvendt undervisning, i dette eksemplet hentet fra et emne i programmering. Løsningen til Uppsala universitet har en rekke funksjoner som er nyttig i omvendt undervisning, bl.a. rapportering av hvordan studentene svarer på spørsmål i videoene, hvor mange ganger videoene blir vist og hvilke deler av videoene som blir spilt flest ganger.

Hvis vi sammenligner de to forløpene for tradisjonell og omvendt undervisning, ser vi at de samles om et felles mål. De munner begge ut i at man skal kunne løse oppgaver, noe som er målet for undervisning i elektroteknikk. Min opplevelse er at omvendt undervisning gjennomført med et godt materiale (video og eller tekst) skaper engasjement og spørsmål som er et godt utgangspunkt for arbeidet i klasserommet. Det beste rådet jeg kan gi er å sette i gang med enkel videoproduksjon selv og utvikle et opplegg rundt dem etter hvert. Du kan f.eks. legge til spørsmål seinere. Selv om man ikke kommer i mål med et fullt opplegg i et emne, vil videoene alltid være nyttige.

KILDER

1. Terje Fykse, Sjøkrigsskolen (vidoer): www.youtube.com/user/ProfTurge/videos
2. David Black-Shaffer, Uppsala universitet: https://www.youtube.com/watch?v=57MvwhSbv3k

Marinen og dieselmotorer

Gisle Strand

Den Kongelige Norske Marine har nyttet dieselmotoren som energi omsetter siden begynnelsen på 1900-tallet. De er brukt og brukes, i all hovedsak, til framdrift og kraftforsyning. Siden den tid har dieselmotoren gjennomgått mange forbedringer og finnes i små og meget store størrelser. Denne korte artikkelen ser litt tilbake og litt fremover på noen utvalgte områder av betydning for våre kampfartøyer.

ET KORT TILBAKEBLIKK

Den 17. februar 1894 startet *Rudolf Diesel* sin eksperimentelle motor som kunne antenne drivstoffet bare på grunn av høyt kompresjonstrykk og den tilhørende temperaturen. Drivstoffet ble blåst inn i motoren med komprimert luft. Diesel hadde konstruert innsprøytningsutstyr, men det var ikke mulig, på den tiden, å lage nøyaktige nok pasninger. Motoren gikk, første gangen, i ca ett minutt med ca 88 omdreininger per minutt *(MTZ 2008)*.

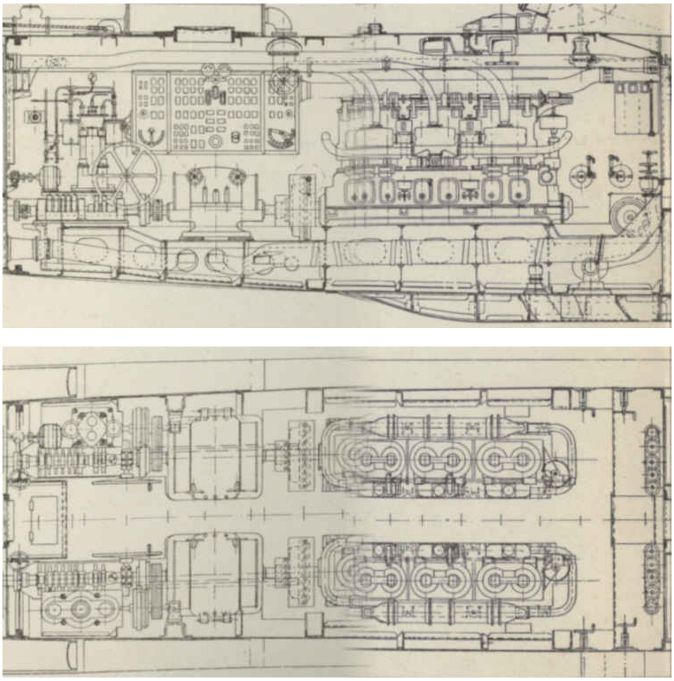
Det første norske skip med dieselmotor var *Roald Amundsens* «Fram» med en 180 hk, 4-sylindret, 2-takts generatormotor fra det svenske firmaet *A.B Diesels Motorer.* Installert ved Marinens hovedverft, Karljohansvern. Dette var i 1910, før avreisen mot Sydishavet *(Frammuseet).*

Dieselmotorer og undervannsbåter

I marine sammenheng var Frankrike først ute med å utnytte ideene til Diesel. Firmaet *Sautter*, *Harlé & Cie* leverte generatorer og motorer til det franske ubåtvåpenet. Dette var bensinmotorer som ikke var spesielt egnet til drift i lukkede rom. De så mulighetene med det nye patentet og kjøpte lisens fra Diesel, januar 1898, for å kunne lage motorer etter Diesel's patent. Året 1900 startet de arbeidet med prototypen. Året etter sto den ferdig. Firmaet fikk ordre på å levere motorer til ubåten "Z". Motorene til denne var noe større enn prototypen og ble installert i 1904. De var absolutt ikke noen suksess. De lagde mye støy, lakk eksosgass og var meget tunge, samlet 19 tonn, med spesifikk vekt (en meget kritisk faktor for marinefartøyer og i særdeleshet undervannsbåter) på 121 kg/hk- en meget høy verdi *(Cummins 2007).*

Vår første undervannbåt Kobben (senere kalt A1), bygget i Tyskland ved *Germaniawerft*, Kiel, sjøsatt 5.mai, overtatt 28.november 1909, var utstyrt med 2 stk petroleumsmotorer.

Motorene var produsert av firmaet *Gebrüder Körting.* De hadde 6 sylindre, nyttet 2-taktsprinsippet og var sløyfespylt. For den tyske marineindustrien var de en mellomløsning til dieselmotorene, som var under konstruksjon, overvant de første barnesykdommene. De fungerte som en ottomotor, hvor en gassblanding blir antent av en gnist ved ønsket tidspunkt. Drivstoffet var parafin / lampeolje. For å få denne til å fordampe skikkelig måtte man nytte forvarming av forbrenningsluften samt varming av forgasserne ved hjelp av eksosvarmen. Drivstoffet ble trykket gjennom forgasserens nåledyser. Dette forstøvet parafinen og blandet den med luften. Blandingen ble så antent av en gnist når stemplet var på vei mot toppen. Tidspunktet for når gnisten slo til kunne fremskyndes eller trekkes tilbake, på samme måte som dagens motorer. (*The Engineer, 1906*). Det tok ca. 5



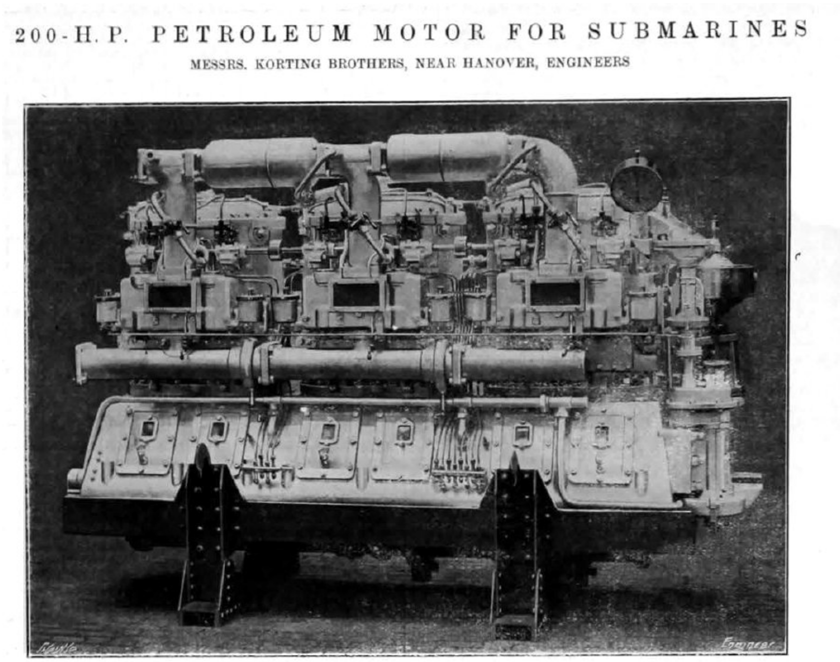
Figur 1 Maskinrommet til Kobben (A1) med de to Körtinger motorene

minutter å starte motorene. De leverte samlet ca. 560 hk ved 550 o/min. Rent driftsmessig og operasjonelt fungerte de ikke optimalt. De var meget synlige i overflate stilling på grunn av mye hvit eksosrøyk.
Det spesifikke forbruket var også meget høyt, 680 gram/kWh, med lav rekkevidde som resultat.

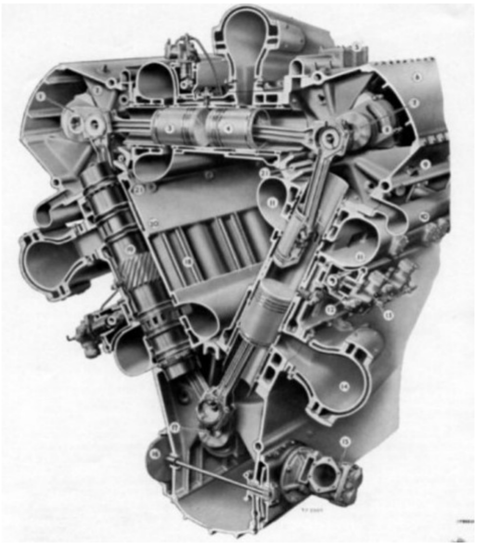
De første norske undervannsbåtene med dieselmotorer var A2, A3 og A4 fra 1913 (A5 ble holdt igjen av Tyskland ved starten av 1.verdenskrig). Dette var 6 sylindrede, 2-taktsmotorer laget av *Krupp Germaniawerft*, Krupp GW motorer. Den ytte 350 hk ved 450 o/min. Senere og noe større utgaver av denne ytte ca.1150hk og sto i flere av de tyske undervannsbåtene under 1. verdenskrig. Den største leverandøren av dieselmotorer til den tyske Kriegsmarine var *Maschinefabrik Augsburg Nürberg AG (M.A.N).* Den mest kjente motoren var den 6 sylindrede S6 V 45/42 (450 mm boring/ 420 mm slag). De hadde som standard 1200 hk ytelse ved 450 o/min. Den spesifikk vekten var på 21.5 kg/hk og de hadde et forbruk ved full last på 347 gram/kWh. De kunne reversere dreieretningen ila 4-5 sek, noe som på den tiden ble sett på som bra i forhold til å lette manøvreringen. De var meget driftsikre, etter datidens standard, og bidro sterkt til den tyske ubåt dominansen *(Cummins 2007).*

I Norge var vi i gang med å skaffe de amerikansk konstruerte Holland type undervannsbåtene som skulle bli til B-klassen (B1- B6). Marinen kjøpte i 1915 fire 6Q28 motorer fra sveitsiske *Gebrüder Sulzer* og lisens til å kunne bygge flere av disse selv. Marinens hovedverft, Karljohansvern, i Horten bygget og etablerte kompetanse som senere førte til en rekke motorbygg under kallenavnet *Horten-Sulzer.*
B1 heiste kommando i 1923 og B6 ikke før i 1930.
Motorene, 2 stk, var 2-takt, 6 sylindre med ytelse på 425 hk per motor. De hadde, blant annet, en konstruktiv løsning hvor sylinder og sylinderdeksel var støpt i ett stykke. Dette var gjort for å redusere bredden og høyden (passe inn i slanke ubåtskrog) samt holde vekten til motoren lav. Stemplene måtte derfor ut via veivhuslukene ved vedlikehold, noe som nok gjorde livet vanskelig for maskinbesetningen. Denne konstruksjonen viste seg og å være farlig. En rekke sprengninger av sylindre skjedde. En livsfarlig hendelse for de som ofte var tett på maskinene under drift. Dette ble forbedret med at Stortinget bevilget 53.000,- i 1938 for å påbegynne utbedringer for B1- B4 *(St.inst 72, 1938)*. B5 og B6 ble levert med adskilt konstruksjon av sylinderdekselet og sylinderen *(Marinemuseet 2009).*

På overflatesiden var det oppsynsfartøyene MS Nordkapp og Senja som var først ute med dieselmotorer til fremdrift. Også disse fra *Gebrüder Sulzer* med 6 sylindre og 580 hk på akslingen.



Figur 2 Körtinger motoren presentert i 1906 i magasinet"The Engineer"(noe mindre ytelse enn versjonen i Kobben)



Figur 3 Snitt av Deltic motoren

<u>Hurtiggående høyytelses dieselmotorer</u>

Den andre verdenskrig førte til ytterligere videreutvikling av dieselmotoren. Dieselmotoren var fortsatt tung ift ytelsen. Flymotorer med bensindrift til marint bruk var tatt i bruk allerede tidlig på 1900 tallet. De hadde betydelig lavere spesifikk vekt enn de første dieselmotorene. Den første motorbåt konkurransen ble for eksempel vunnet i 1903 av *Dorothy Levitt* med en 4-sylindret bensinmotor på 75 hk fra det engelske firmaet *D. Napier & Sons.*

Vår marine ble bedre kjent med denne teknologien med motorbåtoperasjonene fra England/Shetland til kontinentet og Norge. En av bensinmotorene var levert av amerikanske *Packard* og hadde typebetegnelsen 4M2500. Dette var en flymotor konstruert i 1930 – årene. En potent 12 sylindret V-motor med mekanisk drevet radialkompressor for overlading. Slagvolumet var 41.8 liter og ytelsen var oppgitt til å være 919 hk. I løpet av krigen var denne kommet opp mot 1500 hk.
Tørrvekten (uten smøreolje og kjølevæske) til motoren var ca 1338 kg. Det ga en spesifikk vekt på 0.892 kg/hk eller 1.21 kg/kW. Meget akseptable tall den dag i dag *(PT-boats).*

De tyske *Schnellboote*, E-båtene, var derimot utstyrt med 3 stk dieselmotorer fra *Daimler-Benz* av typen MB501,

Figur 4 Fra maskinrommet til en Tjeld-klasse MTB

og senere med MB511 og MB518. Disse ga betydelig lenger rekkevidde enn tilsvarende bensinmotorer med samme ytelser og mye mindre risiko for eksplosjonsartede branner. Motorene bygget på typen DB602 som var konstruert for å drive de store luftskipene. De hadde blant annet motorblokk i sjøvannsbestandig aluminium som bidro mye til at spesifikk vekt var på lave 1.5 kg/hk *(Mercedes-Benz 1,2).*

På alliert side satte det britiske Admiralitetet, i 1943, igang et større prosjekt for å skaffe hurtiggående, lette, sterke og drivstoffgjerrige motorer med gode ytelser og driftsikkerhet. Firmaet *D. Napier & Sons* hadde fått lisens i 1920 til å bygge den tyske flydieselmotoren *Junkers Jumo 204*. De konstruerte sin egen motor, *The Culverin*, basert på den. Motorene hadde 6 sylindre og 12 stempler. Den fungerte etter 2-takts-prinsippet, stemplene gikk mot hverandre og det var derfor en veivaksling i hver ende av motoren. Kraften fra disse ble knyttet sammen med et utvendig gir.
The Culverin var for liten i ytelse for Admiralitetet, bare 720 hk. Ideen til å sette sammen 3 slike motorer kom på bordet av den tekniske tegneren *Herbert Penwarden* ved *Admiralty Engineering Laboratory.* I 1946 fikk *The English Electric Company Ltd* kontrakt om å utvikle og å lage denne motoren. De hadde, i 1942, kjøpt *D. Napier & Sons.* Napier bygget først en 1 sylindret utgave, så en 3 sylindret og i 1950 var den første 18 sylindrede motoren ferdig. Denne var konstruert for å kunne yte 2500 hk ved 2000 o/min. I 1952 var det produsert 6 stk. To av dem ble testet i en tysk E-båt. De tok bare halve plassen til de lange V20-Mercedes motorene. Motoren fikk betegnelsen *Deltic D18-11B.*
Denne var en meget kompakt konstruksjon med spesifikk vekt på 1.58 /1.91 kg/hk (uten/med reduksjonsgearet) *(Brown & Moore, 2003, The Engineer, 1953 og NPHT).* Motoren ble raskt etterspurt og med anskaffelsen av Tjeld-klassen fikk vår Marine en mengde slike motorer. Vi fikk en videreutviklet utgave med mye høyere ytelse. Den hadde benevning *T18-37K*. En motor med både mekanisk drevet kompressor og eksos drevet turbo for overlading. Maksimum ytelse var ca. 3100 hk ved 2000 o/min.

Motorene hadde mange barnesykdommer og måtte passes kjærlig. Løsningen var å sørge for at motorbytte kunne utføres hurtig. Det skal også sies at i dag, 70 år etter designet av motoren, er de fortsatt i bruk på de engelske minefartøyene i *Hunt*-klassen. En motor utviklet til marinebruk fra starten av med høy kompakthet, lav spesifikk vekt, lav magnetiske signatur og med et meget lavt vibrasjonsnivå.

2 DAGENS SITUASJON

Så – hva er situasjonen i 2016?
Innenfor området spesifikk vekt er typiske data på nye motorer i tilsvarende ytelse og turtallsområde, for eksempel MTU 4000 – serien eller Paxman (Nå MAN Diesel & Turbo UK Ltd) VP185 i størrelse 1.95 – 2.84 kg/hk uten reduksjongiret. For sammeligning kan det nevnes at motorene i Storm-, Snøgg- og Hauk-klassen (Maybach MD872 / MTU 16V 538) var på ca. 1.79 kg/hk.

Motorene i dag har blitt noe tyngre ift ytelsen. Ikke bare motoren selv, men også hjelpeutstyret, spesielt kontroll og styringsdelen, har økt i vekt og i plassbehov. Motorene og dens hjelpeutstyr har blitt mye mer sofistikerte både på kontroll av forbrenningsprosessen og etterbehandlingen av eksosen. Dette har ført til reduserte utslipp, spesielt, av nitrogenoksider. Men - også til en betydelig mer komplisert konstruksjon, samlet sett.

Til nå er det bare de aller minste fartøyene våre som er blitt utstyrt med full elektronisk kontroll over innsprøytningsforløpet. På de større fartøyene våre er det fortsatt de etablerte mekaniske teknikker som anvendes, men med elektronisk kontroll og styring av pådraget og turtallet til motoren. På de nyeste vil det være sensorer og raske datamaskiner med dertil egnede programmer som passer på og forteller innsprøytningsutstyret nøyaktig hvor mye og når drivstoffet må leveres for at motoren skal være sterk nok til å holde det ønskede turtall. Den samler også inn alle de viktige data som temperaturer og trykk. Ved feiltilstand gis det alarmer og eventuelle tiltak blir utført automatisk for å hindre videre feilutvikling. Et nylaget motoranlegg i 2016 har ett meget kraftig datasystem for å håndterer all informasjon og kommunikasjon fra og til motorene.

Hva så med Marinen og bruk av motorer med «siste skrik» innen motorstyring og kontroll?

Utviklingen av motorer med hel elektronisk kontroll har pågått i flere tiår. Nye og stadig strengere krav til reduserte utslipp av nitrogenoksider og partikler har drevet utviklingen. Spesielt motorer til kjøretøy har tatt den nye teknologien i bruk. Innen den sivile maritime verden er det også utviklet motorer og løsninger som prøver å tilfredsstille utslippskravene.

Når Marinen, engang i fremtiden, skal ha nye motorer, ved anskaffelse eller ombygging, vil valg av løsning være en utfordring. For et marinefartøy, spesielt våre krigsfartøy, vil ønskene alltid være i retning av en mest mulig kompakt motor, med høy ytelse, god virkningsgrad og høy driftssikkerhet. Den må samtidig være mest mulig enkel å holde i gang under krevende forhold, tåle kraftige og hurtige bevegelser og kunne bruke drivstoff av varierende kvalitet. Disse kravene vil være i konflikt med den teknologien motorindustrien utvikler, å kanskje, også ønsker å selge og de krav sivile myndigheter setter. Når det gjelder dagens og nye krav til eksosutslipp og Marinens evne til å etterleve det hele må det foretas noen avveininger.

Et fartøys driftsprofil bestemmer hvor mye ytelse over tid maskineriet må levere. Den største andelen vil således være dimensjonerende for valg av innsprøytningsteknologi, tilhørende kontroll og styresystemer og systemer for eventuell etterbehandling av utslippene. Ser man på internasjonale krav til utslipp som nitrogenoksider og partikler vil en motor som har mye variasjon i turtall og ytelse raskt bli avhengig av sofistikerte systemer for å greie kravene. Er driftsforholdene slik at motoren stort sett bare opererer ved ett turtall og lite variasjon i belastning vil motoren kunne utstyres med enklere system – totalt sett. Hvilke løsninger Marinen til slutt velger vil være påvirket av de rådende forhold omgivelsene krever og de som gir et fartøy høy kampkraft og overlevelsesevne.

<u>Innsprøytningsdysen</u>

Ett område som kan eksemplifisere noen av utfordringene med driftsikkerhet og tilhørende kostnader er innsprøytningsdysen, en meget viktig komponent og en slitedel i dieselmotorer. I denne sammenheng kan vi se litt på det som skal til for at disse fungerer slik de er tenkt og litt om hvilke kostnader der er forbundet med å eie disse.

En innsprøytningsdyse og det tilhørende styre/kontrollorgan skal sørge for at rett mengde drivstoffet blir forstøvet riktig og fordelt i forbrenningsrommet slik at forbrenningen skjer raskt og fullstendig. Hensikten er å oppnå mest mulig omgjøring av den bundne energien i drivstoffet til mekanisk arbeid. Sammenligner vi gammel, etablert teknikk, med ny vil man oppdage at toleranser og klaringer i dysekonstruksjonen er blitt enda mer fine. Selve åpningen og stengningen av dysenålen, som slipper drivstoffet inn i forbrenningsrommet, er direkte elektronisk styrt mot de eldre mekaniske, trykkbaserte løsninger. I dag kan drivstofftrykket inne i dysen justeres over et stort område og dysenålen, som åpner for at drivstoffet "skytes" inn, kan åpne og lukke flere ganger i et innsprøytningsforløp. Teknikken gir mange fordeler ved at innsprøytet mengde kontinuerlig tilpasses i tid og mengde, etter behov. Men - en viktig ulempe er at de strømningstekniske forhold i dysens små ganger og passasjer ikke blir optimale, med resultat at slitasje og erosjon øker.

I tillegg er de nye dysene meget følsomme for drivtoffets renhet og smøreevne. Tall og erfaringer hentet inn på levetider og kostnader for denne type dyse viser at reklamerte levetider på 8-12000 timer ofte ikke er mer enn rundt 1000 timer. Det har også vist seg at å reparere denne type innsprøytningsdyser ikke svarer seg

(Carstens 2008). Kostnadstall for en dyse til en nyere motor til marint bruk med ytelse rundt 180-200 kW/sylinder ligger i området 10.000 – 20.000 NOK. La oss si at et marinefartøy trenger maskinkraft tilsvarende 20 slike sylindre. Med en tenkt driftstid per år på ca. 2000 – 2500 timer per år vil det da tilsvare en delekostnad per år mellom 400 – 800 kNOK. Sammenlignet med gammel teknologi, hvor levetid på dyser ofte var 10000 timer og prisen på dysen lå rundt 2.000 NOK ville delekostnadene, fordelt på ett år, blitt ca. 8 – 10 kNOK. Med disse tallene er ny teknologi 50 – 80 ganger dyrere. Alle andre kostnader forbundet med liggetiden, selve arbeidet, infrastruktur og utstyr vil alltid komme i tillegg og følgelig utgjøre en ekstra kostnad for den teknologien som i ett tidsintervall må skiftes 4-5 ganger oftere.

Sjøkrigsskolen

Hva bidrar så Sjøkrigsskolen med i denne sammenhengen? Med fornyelsen av de tekniske laboratoriene fra 2013 til i dag har kadettene som studerer forbrenning og motortekniske forhold nyttet en 1-sylindret forsøksmotor med et hel-elektronisk styrt innsprøytningssystem. Denne gir anledning til å studere hele systemet med alle detaljer, innstillinger og disses virkning på utslipp og motorens virkningsgrader. Utstyret forbereder kadettene til rollen som tekniske offiserer og vil forhåpentligvis gi de et godt utgangspunkt for kritisk tenkning ved drift, anskaffeler og modifikasjoner. Fremdrift og kraftproduksjon, for marinefartøyer, er et krevende område å optimalisere grunnet de mange og ofte motstridene forhold nevnt tidligere.

For de kommende og blivende Marineingeniører vil det nok fortsatt være en viktig oppgave å finne den beste egnede kompromissløsningen som ivaretar de sjømilitære behov og som, så langt som mulig, også tar hensyn til andre forhold.

Figur 5 Forsøksmotoren

KILDER

- Lyle Cummins: *Diesels – For the first stealth weapon: Submarine power 1902-1945*, 2007
- Innst S. Nr.72: St.prp. nr.44, 1938, *https://www.stortinget.no/no/Saker-og-publikasjoner/Stortingsforhandlinger/, 1938*
- Marinemuseet: *Undervannsbåtvåpenet 100 år*, 2009.
- Frammuseet: *http://www.frammuseum.no/*
- MTZ (Motortechnische Zeitschrift), *150 jahre Rudolf Diesel,* ekstrautgave, mars 2008
- The Engineer: *3.aug 1906 og april 24*, 1953
- Mercedes-Benz 1: *Broschüre der Mercedes-Benz AG über die Baureihe MB 518*
- Mercedes-Benz 2: *Baubelehrung für Schnellboots-Dieselmotor MB 518 B Ausgabe A, Stuttgart-Untertürkheim,* 1958
- PT-boats: *http://www.pt-boat.com/packard/packard.html*
- Brown & Moore: *Rebuilding the Royal Navy: Warship Design Since 1945,* 2003
- NPHT: *http://www.npht.org/deltic/4579702653*, aug 2016
- Magne Carstens: Prosjektoppgave SKSK, *Marinen og moderne dieselinnsprøytningssystemer,* 2008

DEL 3

Matematikk i bruk

→ Innholdsfortegnelse

Ryktespredning, spioner og pi

Tore Langholm og Knut Meen

1. Innledning

Som tittelen antyder, vil dette handle om litt av hvert. Hovedtema er en diskusjon om valg av modeller i stokastisk analyse, og da særlig et forslag til oppmykning av tidsbegrepet i Markovkjeder, men utgangspunktet vil være et tenkt eksempel med spredning av informasjon i en befolkning. Vi studerer en prosess som starter med at én person besitter en bestemt informasjon, og som ender med at den er kjent for alle. Eksempelet kan settes i en militær kontekst hvis vi tenker på sensitiv, strategisk informasjon i en befolkning med infiltratører. Når hele befolkningen kjenner informasjonen, vil de fiendtlige lytterne også med sikkerhet gjøre det.

Eksemplene er gjort så enkle som det går an for å tilpasse oss plassen her samtidig som vi kan belyse hovedtemaene. De vil variere litt, men vi skal hele tiden holde oss til en løsmunnet og litt glemsk befolkning: Hver person som kjenner hemmeligheten forteller den hver dag videre til en tilfeldig annen person. Han husker ikke hvem han har fortalt den til før, så det kan godt skje at den andre parten allerede er informert. Spørsmålet er hvor mange dager det tar før informasjonen er kjent i hele befolkningen. Vi skal se at dette går forbløffende fort. Det vil si, den *forventede* tiden er veldig kort. Denne tiden er også en stokastisk variabel med forbløffende liten varians, det vil si at man også med stor sikkerhet alltid kan si at det tar kort tid til informasjonen er kjent for alle.

Stokastiske prosesser som utvikler seg trinnvis over tid modelleres gjerne ved hjelp av Markovkjeder. Forutsetningen er at man kan identifisere en mengde av tilstander som prosessen kan befinne seg i, og kan tallfeste sannsynlighetene for overganger mellom slike tilstander i løpet av en gitt tidsenhet. Hvis disse sannsynlighetene er uavhengige av hvor lenge prosessen har pågått og hvilke tilstander som har vært besøkt tidligere, snakker vi om en tidshomogen Markovkjede. En av de vanligste størrelsene man kan være interessert i å undersøke, er den totale tiden fra start til slutt, det vil si hvor mange tidsenheter prosessen bruker fra den starter i en gitt starttilstand og til den når («absorberes i») en gitt sluttilstand. Siden overgangene mellom tilstander styres av sannsynligheter, vil denne «absorpsjonstiden» være en stokastisk variabel, som vi må være fornøyd med å beskrive ved hjelp av en sannsynlighetsfordeling med størrelser som forventning, varians og prediksjonsintervaller

2. Karl den store

Et resultat som fikk stor oppmerksomhet blant slektsforskere for et par tiår siden (Chang 1999) beskriver en forenklet modell for slektsforhold i en befolkning av konstant størrelse, og ble av mange tolket som et slags bevis på at alle nålevende europeere er etterkommere av Karl den store. Tidsenheten var her en generasjon, og hver person var barn av to vilkårlige personer i forrige generasjon. Prosessen beveger seg bakover i generasjonene, og holder hele tiden rede på hvem i dagens befolkning som er etterkommere av de ulike individene i de tidligere generasjonene. For litt store befolkninger (som den europeiske) viser det seg at den forventede tiden før det dukker opp en felles stamfar eller stammor til alle nålevende individer, bare er ca. $\log_2(N)$ generasjoner, der N er den konstante befolkningsstørrelsen. Den forventede tiden bakover til en generasjon der alle individer med etterkommere idag er stamfedre og stammødre til alle nålevende personer, er tilsvarende på ca. $1{,}77 \cdot \log_2(N)$ generasjoner. Hvis man regner med et Europa før befolkningseksplosjonen fra syttenhundretallet og utover, blir det snakk om toerlogaritmen til rundt 100 millioner og altså knapt 27 generasjoner bakover til én felles stamfar eller stammor, og 47 generasjoner bakover til det skjer at alle som har etterkommere i dag er stammødre og stamfedre til alle nålevende personer. Hvis man regner med en gjennomsnittlig generasjonsavstand på 25 år (norske data fra sekstenhundretallet og frem til i dag tilsier riktignok at dette er for lite) er man da tilbake på Karl den stores tid.

3. Kuler i ball

Changs artikkel var aldri ment som en seriøs analyse av Karl den stores familieforhold, den forutsetter blant annet en ekstrem befolkningsmobilitet som på ingen måte var til stede, men dette er likevel et dramatisk resultat som er vel verd å ha i bakhodet i mange lignende situasjoner. Situasjonen med informasjonsspredning som vi ser på her, er helt klart av en lignende type, men ikke lik nok til at Changs modeller og resultater kommer direkte til anvendelse. Vi klarer oss med tilsynelatende enklere Markovkjeder med mindre informasjon i tilstandene, der sannsynlighetene blir annerledes men saktens kompliserte nok, som vi skal se.

Hvis befolkningen som informasjonen blir spredt i er på N individer, trenger vi N ulike tilstander, en for hvert mulig antall individer som kjenner informasjonen. (Dette antallet er alltid minst én, siden vi starter der og siden vi ikke tar høyde for at noen glemmer akkurat dette.) La oss nå se på sannsynlighetene for overgang mellom ulike tilstander fra en dag til en annen: Hvis det er 100 individer i befolkningen og 60 av dem kjenner hemmeligheten i dag, hva er da sannsynligheten for at 80 av dem kjenner den i morgen? 60 personer skal altså fortelle hemmeligheten til en annen person (for å gjøre modellen litt enkel, kan denne personen godt være han eller hun selv – dette kan jo tolkes som de gangene han eller hun klarer å holde munn), og vi skal finne sannsynligheten for at det blant disse er nøyaktig 20 personer som ikke kjenner den fra før. Dette kan beskrives av en urnemodell bestående av 100 kuler hvor 40 er spesielle («uinnvidde»). Herfra trekker vi, med tilbakelegging, 60 ganger, og teller hvor mange ulike spesielle som blir trukket ut. Vi teller altså hvor mange ganger vi får en ball av den «spesielle» typen, som vi ikke har sett før. Dette er i virkeligheten en ekstremt komplisert modell, intet mindre enn uttrykket

$$\binom{K}{k}\sum_{m=0}^{k}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}\cdot\left(\frac{N-K+m}{N}\right)^{n}$$

må til for å angi sannsynligheten for at vi teller til nøyaktig k når n er antall trekninger, N er antall baller i urnen og K er antallet spesielle baller.[1] Dette kan saktens beregnes i enkelttilfeller; med $N = 100$, $K = 40$, $n = 60$ og $k = 20$ – som i eksempelet hvor vi spurte om sjansen for at nøyaktig 80 av totalt 100 personer er informert dagen etter at 60 var det – får vi sannsynligheten

$$\binom{40}{20}\sum_{m=0}^{20}(-1)^{20-m}\binom{20}{m}\cdot\left(\frac{60+m}{100}\right)^{60}\approx 0{,}116$$

4. Andre takter – bokstavelig talt

Hvis vi imidlertid ønsker å komme videre herfra til enkle, generelle uttrykk for forventet absorpsjonstid og lignende, er vi virkelig ille ute. Noen ganger kommer man i slike situasjoner fordi man har gitt seg i kast med et umulig problem, men det hender også at man kommer der fordi man har formulert det aktuelle matematiske problemet på en klønete måte som introduserer unødvendige komplikasjoner. Vårt eksempel er nok av den siste typen.

---

[1] Formelen er utledet fra en lignende formel for såkalte Stirling-tall av andre orden. Dette er slektninger av binomialkoeffisientene som gjerne dukker opp i kompliserte kombinatoriske situasjoner. Vi dropper utledningen her, siden poenget mest er å vise hvor komplisert uttrykket blir. Nærmere tips for hvordan formelen bevises vil man trolig finne som oppgaver i lærebøker i kombinatorikk.

Vi har formulert problemet slik at tidsenheten alltid er en dag, men etter hvert som mange personer er informert om hemmeligheten og forteller den videre, blir en beskrivelse av et døgns forløp mer og mer komplisert. Hvis vi isteden åpner for å dele opp tiden ulikt i ulike faser av prosessen, kan vi få en modell med litt mer kompleks struktur men alt i alt langt mer håndterbar rent matematisk. Den nye modellen gir bare tilnærmet samme resultater som den forrige, men er en minst like god modellering av det konkrete eksempelet.

Konkret deler vi nå opp tiden slik at et «klokketikk» ut fra tilstand M_n, da n personer er informert, markerer $1/n$ døgn, og mellom to slike tikk skal bare én av de n informerte personene fortelle hemmeligheten videre. De eneste mulige tilstandene i neste øyeblikk – etter ett slikt tikk – er da tilstanden M_n selv (svarende til at en allerede informert person ble valgt) eller i motsatt fall M_{n+1}. Overgangssannsynlighetene er henholdsvis

$$\frac{n}{N} \text{ og } \frac{N-n}{N}.$$

Tiden prosessen tar for å bevege seg fra M_n til M_{n+1} blir dermed en stokastisk variabel X_n med punktsannsynligheter

$$P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \left(\frac{n}{N}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{N-n}{N}\right).$$

Det vil si en geometrisk fordelt variabel med parameter $\frac{N-n}{N}$, som så er dividert med konstanten n. Total tid frem til absorpsjon blir dermed en lineærkombinasjon av ulike, geometrisk fordelte variabler.

Enkle summer av slike variabler er studert tidligere, blant annet av Sen og Balakrisnan (1999), som gir en eksplisitt formel for punktsannsynlighetene. De ulike vektene, som er essensielle for modellen her, gjør imidlertid at disse resultatene ikke kommer til anvendelse.

Forventning og varians for X_n blir

$$\mathbf{E}\left[X_n\right] = \frac{N}{n\cdot(N-n)} \text{ og } \mathbf{Var}\left[X_n\right] = \frac{N}{n\cdot(N-n)^2}.$$

Siden de ulike X_n er uavhengige variabler, vil total absorpsjonstid $S_{N-1} = \sum_{n=1}^{N-1} X_n$ bli en stokastisk variabel med forventning og varians som under.

$$\mathbf{E}\left[S_{N-1}\right] = \sum_{n=1}^{N-1}\mathbf{E}\left[X_n\right] = \sum_{n=1}^{N-1}\frac{N}{n\cdot(N-n)} = \sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{N-n}\right) = 2\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n} = 2H_{N-1}$$

$$\mathbf{Var}\left[S_{N-1}\right] = \sum_{n=1}^{N-1}\mathbf{Var}\left[X_n\right] = \sum_{n=1}^{N-1}\frac{N}{n\cdot(N-n)^2} = \sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{N\cdot n}+\frac{1}{N\cdot(N-n)}+\frac{1}{(N-n)^2}\right) = \frac{2H_{N-1}}{N} + H_{N-1}^{(2)}$$

H_n er altså summen av en endelig harmonisk rekke frem til og med leddet $1/n$, som er tilnærmet lik $\ln(n)+\gamma \approx \ln(n)+0{,}5772$, mens $H_n^{(2)}$ er $\sum_{k=1}^{n} 1/k^2$, som for store n konvergerer mot $\pi^2/6$. (Eulers konstant γ er nettopp definert som differansen mellom $\ln(n)$ og H_n når $N \to \infty$.)

Med en befolkning på fem millioner, som den norske, får vi da en forventet absorpsjonstid, altså tiden det tar til alle er informert, på 32 dager, med et standardavvik på $\sqrt{\pi^2/6} = \pi/\sqrt{6} \approx 1{,}3$ dager. Bruker vi tommelfingerregelen på forventning pluss/minus to standardavvik for å få et 95% prediksjonsintervall, så blir dette intervallet altså fra 29,4 til 34,6 dager.

5. $\pi^2/6$

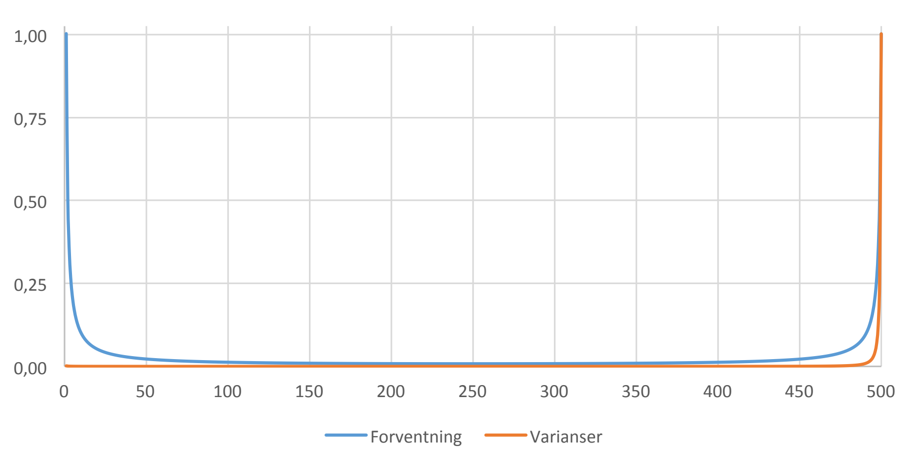
Tommelfingerregelen over tyr man til når bare forventning og varians er kjent, og ikke ytterligere egenskaper ved sannsynlighetsfordelingen. Variansen vi fant ovenfor, på $\pi^2/6$, uavhengig av størrelse på befolkningen, gir et tips om hvilken fordeling vi egentlig har med å gjøre. Kjente fordelinger med akkurat denne egenskapen, er nemlig de såkalte *Gumbel*-fordelingene, gitt ved kumulative fordelingsfunksjoner av typen under, der c er en konstant:

$$G(t) = e^{-e^{-(t-c)}}$$

Forventning og varians er henholdsvis $c + \gamma \approx c + 0{,}5772$ og $\pi^2/6$. Fra uttrykket ser vi at det på mange måter bare er én slik fordeling, i den forstand forskjellige verdier av c bare gir en forflytning av fordelingsfunksjonen til høyre eller venstre langs tidsaksen. Sagt på en annen måte: En Gumbel-variabel pluss en konstant er en ny Gumbel-variabel, og alle Gumbel-variabler kan lages fra en av dem på denne måten.

Simuleringer gjort i Python bekrefter på det sterkeste at vi er på rett vei her, de viser nettopp at S_{N-1} oppfører seg som en Gumbel-variabel med forventning $2H_{N-1}$. Dette er kanskje ikke overraskende, for Gumbel-fordelingen er ellers kjent som en såkalt ekstremvariabelfordeling, altså fordelingen til en variabel vi får ved å velge den største eller den minste i en serie av uavhengige og identisk fordelte variabler. Høyden på den høyeste gutten i klassen kan være en ekstremvariabel, om enn ikke Gumbel-fordelt. Tiden til siste pære slukner i et rom med mange lyspærer, kan under visse forutsetninger være Gumbel-fordelt. S_{N-1} fremstår også som en slags ekstremvariabel, siden den er tiden det tar til siste etternøler i befolkningen får del i hemmeligheten, men det er ellers vanskelig å argumentere for at vanlige betingelser om uavhengighet som er nødvendige for å sikre Gumbel-fordeling er på plass.

Forklaringen på hvorfor Gumbel-fordelingen likevel dukker opp også i dette tilfellet må antagelig søkes i helt spesielle forhold som gjelder den aktuelle modellen. Tre ting peker seg ut: Uttrykket for varians viser at variablene X_n stort sett har en forsvinnende liten varians i forhold til de aller siste variablene i rekken – de siste variablene X_n står for praktisk talt all variansen. Plottet under viser forventningsverdier og varianser til X_n-ene når $N = 501$.



I tillegg har disse siste variablene et svært finfordelt utfallsrom, og man kan vise at de er tilnærmet eksponensialfordelte. Et tredje poeng er at for store N vil forventningene til de siste variablene $X_{N-1}, X_{N-2}, \dots, X_{N-K}$ danne en tilnærmet harmonisk rekke $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{K}$.

For å være mer presise, kan vi ta for oss et stort tall K som vi i første omgang holder fast. Hvis vi nå deler opp summen S_{N-1} i to ledd med henholdsvis de $N-1-K$ første og de K siste,

$$S_{N-1} = \sum_{n=1}^{N-1-K} X_n + \sum_{n=1}^{K} X_{N-n},$$

og velger K og N tilstrekkelig store, kan vi få summen av variansene til variablene i første ledd til å bli så liten vi bare vil, slik at første ledd for alle praktiske formål kan betraktes som en stokastisk konstant. Hvis vi nå holder denne verdien for K fast, men fortsetter å øke N, vil variansen av første ledd forbli minst like liten som den var. For store N danner i tillegg variablene i siste ledd en rekke av tilnærmet eksponensialfordelte variabler med tilnærmede forventninger $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{K}$, det vil si intensiteter $1, 2, 3, \dots, K$. Konvolusjonen av eksponensialfordelte variabler Y_1, Y_2, Y_3,.. Y_K med ulike intensiteter α_1, α_2, α_3,.. α_K er generelt (Johnson et al. 1994) en stokastisk variabel med tetthetsfunksjon

$$f(t) = \sum_{n=1}^{K} \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_K}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{N} (\alpha_m - \alpha_n)} e^{-\alpha_n \cdot t}$$

Med $\alpha_n = n$ gir dette

$$f(t) = \sum_{n=1}^{K} \frac{K!}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{K} (m-n)} e^{-n \cdot t} = \sum_{n=1}^{K} \frac{K!}{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot (K-n)!} e^{-n \cdot t} = K \cdot \sum_{n=1}^{K} \binom{K-1}{n-1} (-1)^{n-1} e^{-n \cdot t}$$

$$= K \cdot \sum_{n=0}^{K-1} \binom{K-1}{n} (-1)^n e^{-(n+1) \cdot t} = Ke^{-t} \cdot \sum_{n=0}^{K-1} \binom{K-1}{n} (-e^{-t})^n = Ke^{-t} \cdot (1 - e^{-t})^{K-1}$$

og følgelig ved integrasjon den kumulative fordelingsfunksjonen $F(t) = \left(1 - e^{-t}\right)^K$, som merkelig nok oppfører seg tilnærmet som $e^{-Ke^{-t}}$ for litt store K. Det siste er en alternativ skrivemåte for $e^{-e^{-(t-\ln(K))}}$, altså fordelingsfunksjonen til en Gumbel-variabel. Siden de første $N-1-K$ variablene oppfører seg som en tilnærmet konstant, vil også hele summen S_{N-1} oppføre seg som en tilnærmet Gumbel-variabel. At forventningen til denne variabelen er $2H_{N-1}$, så vi allerede i forrige avsnitt. Totalt gir dette en fordelingsfunksjon $e^{-e^{-(t-2H_{N-1}+\gamma)}}$, som for store N også oppfører seg tilnærmet lik $e^{-e^{-(t-2\ln(N-1)-\gamma)}} = e^{-(N-1)^2 e^{-(t-\gamma)}}$.

Argumentet over er ment som en omtrentlig forklaring på observasjoner gjort i simuleringer, tilpasset form og lengde her. I en mer stringent fremstilling som ikke får plass, blir grenseverdibetraktningene gjennomført mer omstendelig og med større forsiktighet[2], men formelen som kommer ut er den samme, og når vi støtter oss til den, forteller den den at prediksjonsintervallet fra 29,4 til 34,6 dager i virkeligheten har en prediksjonsgrad nærmere 96% enn 95%.

6. Spion

Det mest interessante spørsmålet er ikke nødvendigvis når siste etternøler får del i hemmeligheten. Det typiske er at dette skjer en god stund etter at nesten alle andre er informert. Av plottet ovenfor ser man at forventningsverdiene for de ulike X_n er symmetriske om midten, svært lave rundt $n = N/2$ og høyere mot sidene. Det er lett å forstå hvorfor, færre personer blir informert per tidsenhet i begynnelsen, siden det er færre til å spre informasjonen, og det er også færre mot slutten, fordi nesten alle som da blir fortalt hemmeligheten allerede er informert. Generelt kan vi si at prosessen har tre faser: Først en slags «inkubasjonstid» frem til en signifikant del av befolkningen – si fem prosent – er orientert. Hvor lang tid dette tar, er avhengig av befolkningsstørrelsen. Så kommer noen få, hektiske dager når nesten alle får informasjonen første gang. Tiden det tar fra ca. 5 % er orientert til ca. 95 % er orientert, er praktisk talt uavhengig av befolkningsstørrelsen, og ligger i overkant av en halv uke. Til slutt følger en lengre konsolideringsperiode – også den avhengig av befolkningsstørrelsen – frem til alle er orientert.

Dette betyr at hvis det fins en fiendtlig «lytter» i befolkningen, så er det overveiende sannsynlig at også han er blant dem som snapper opp informasjonen i løpet av den hektiske fasen på midten. Vi skal se at den forventede tiden frem til han er orientert er på $\frac{N}{N-1} \cdot H_{N-1}$ dager, med et standardavvik som aldri overstiger $\pi/\sqrt{3} \approx 1{,}8$ dager, uansett befolkningsstørrelse.

For å gjøre dette, må vi først se på de stokastiske variablene $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, svarende til tiden frem til $n+1$ personer er orientert. Beregninger tilsvarende dem over gir

[2] En komplikasjon som ikke takles i fremstillingen her, er at forventningen av første ledd øker når N øker, selv om variansen holder seg liten.

$$\mathbf{E}\left[S_n\right] = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{N-k}\right) \text{ og } \mathbf{Var}\left[S_n\right] = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{Var}\left[X_k\right] = \sum_{n=k}^{n}\frac{N}{k\cdot\left(N-k\right)^2} = \tfrac{1}{N}E\left[S_n\right] + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(N-k\right)^2}$$

Som antydet over, forutsetter vi at den fiendtlige lytteren hele tiden har like stor sjanse for å bli informert som alle andre. Hvis vi altså stiller hele befolkningen opp i en rekke og tildeler dem nummer etter når de ble informert, så vil spionens «løpenummer» være en diskret, uniformt fordelt stokastisk variabel over mengden $\{2,...,N\}$, og tiden frem til spionen er orientert – la oss kalle dette Y – vil med like stor sannsynlighet oppføre seg som hver av de tilsvarende variablene $S_1,...,S_{N-1}$. Forventet tid frem til spionen er orientert, er da

$$\mathbf{E}\left[Y\right] = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1}\mathbf{E}\left[S_n\right] = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right) + \sum_{n=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{N-k}\right)\right) = \frac{N}{N-1}\cdot H_{N-1}.$$

Siste likhet skjuler en lengre utledning som utelates her, men resultatet er ikke overraskende; det sier bare at spionen i gjennomsnitt vil snappe opp informasjonen omtrent midt i prosessen. Mer interessant er det å finne variansen til Y, den vil kunne si noe om i hvilken grad vi faktisk kan *regne med* at spionen vil snappe opp informasjonen rundt dette tidspunktet. Variansen til Y finnes ved først å gå veien om

$$\mathbf{E}\left[S_n^{\,2}\right] = \mathbf{Var}\left[S_n\right] + \mathbf{E}\left[S_n\right]^2 = \tfrac{1}{N}\mathbf{E}\left[S_n\right] + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(N-k\right)^2} + \mathbf{E}\left[S_n\right]^2 \quad \text{og}$$

$$\mathbf{E}\left[Y^2\right] = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1}\mathbf{E}\left[S_n^{\,2}\right] = \frac{1}{N\left(N-1\right)}\sum_{n=1}^{N-1}\mathbf{E}\left[S_n\right] + \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(N-k\right)^2} + \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N-1}\mathbf{E}\left[S_n\right]^2$$

$$= \frac{H_{N-1}}{N-1} + \frac{H_{N-1}}{N-1} + \frac{1}{N-1}\left(N\cdot\left(H_{N-1}\right)^2 - 2H_{N-1} + 2N\cdot H_{N-1}^{(2)}\right) = \frac{N}{N-1}\left(\left(H_{N-1}\right)^2 + 2H_{N-1}^{(2)}\right)$$

Overgangene over skjuler en del utregninger som ikke får plass her, men setter vi disse tingene sammen, får vi

$$\mathbf{Var}\left[Y\right] = \mathbf{E}\left[Y^2\right] - \mathbf{E}\left[Y\right]^2 = \frac{N}{N-1}\left(\left(H_{N-1}\right)^2 + 2H_{N-1}^{(2)}\right) - \frac{N^2}{\left(N-1\right)^2}\cdot\left(H_{N-1}\right)^2$$
$$= \frac{2N}{N-1}H_{N-1}^{(2)} - \frac{N}{\left(N-1\right)^2}\cdot\left(H_{N-1}\right)^2$$

Her vil det første leddet konvergere mot $\pi^2/3$ mens det andre leddet konvergerer mot 0. Med en befolkning på fem millioner, med én infiltratør, vil tommelfingerregelen om forventning pluss/minus to standardavvik fortelle at infiltratøren med 95% sannsynlighet snapper opp informasjonen en gang mellom 12,4 og 19,6 dager etter at førstemann i befolkningen var orientert.

Forventet tid ligger i midten av dette intervallet, på 16 dager. Hva om befolkningen inneholder flere infiltratører? Siden nesten hele befolkningen snapper opp nyheten i løpet av en kort periode på midten, er det naturlig å tenke seg at forventningsverdien på 16 dager ikke endrer seg stort hvis man for eksempel ser for seg to infiltratører, og ser på tiden frem til den første av dem er orientert. Vi har regnet på dette også, og resultatet ser ut til å være en fremskyndelse på ca. en dag, uavhengig av befolkningsstørrelsen. Hvordan bildet utvikler seg etterhvert som man ser for seg flere og flere infiltratører, er et interessant spørsmål som kanskje kan belyses i fremtidig arbeid.

Referanser

Chang, Joseph T. (1999). Recent Common Ancestors of all Present-Day Individuals. *Adv. Appl. Prob*. **31**, 1002–1026.

Johnson, Norman L., Samuel Kotz og N. Balakrishnan (1994). *Continuous Univariate Distributions, Vol. 1, 2nd Ed*. Wiley.

Sen, Ananda og N. Balakrishnan (1999). Convolution of geometrics and a reliability problem. *Statistics & Probability Letters* **43**, 421–426.

Om sannsynlighet og risiko

Knut Meen

Denne artikkelen tar opp *noen* av alle de problemstillinger, og fagområder, som sannsynlighetsregningen beskjeftiger seg med. Begrepene *risiko* og *sannsynlighet* blir diskutert, to begreper mange oppfatter som synonymer. Deretter tas det opp de to viktigste, og nærmest diamntralt motsatte oppfatninger av hva sannsynlighet er, den *frekventistiske* og den *bayesianske*. Til slutt tar vi opp noen eksempler på *stokastisk lovmessighet*.

TILFELDIGHETER, BESLUTNINGER OG SIMULERINGER

Tilfeldigheter inntreffer hele tiden, det er de fleste enige om. Det er lett å komme på tilfeldige hendelser som en knapt nok registrerte da de inntraff, men som ved nærmere ettertanke viser seg å ha hatt enorme konsekvenser i ettertiden. Hadde *jeg* – på gymnaset – fått samme karakter på fysikkeksamen som jeg hadde i standpunkt, så hadde jeg kommet inn ved NTH i Trondheim. Jeg hadde *garantert* reist til Trøndelag og *sannsynligvis* aldri slått meg ned i Hordaland. Mine nåværende venner ville savnet meg like lite som trønderne gjør. Hvis jeg hadde begynt på NTH og fått barn, ville det – *helt sikkert* – vært noen helt andre enn de jeg har nå.

Det finnes eksempler på situasjoner som virker fullstendig *usannsynlige* i det de oppstår, men som ikke får *noen* påviselige konsekvenser på sikt. Fire personer spiller yatzy og alle får yatzy (fem like) i første omgang – *utrolig*, men *mulig*[1].

Mer spesielt blir det når femten personer skal møte i kirken ti på halv åtte, til korøvelse, men fem på halv åtte blir kirken ødelagt i en eksplosjon. *Tilfeldigvis* hadde *ingen* møtt opp ennå[2].

I dagliglivet foretrekker faktisk de fleste av oss en viss grad av *sikkerhet* omkring våre gjøremål. Men ved utsikter til å kunne vinne *store gevinster* med en *begrenset innsats*, som f.eks. i Lotto, oppsøker mange gjerne situasjoner som kan kalles ufordelaktige. *Ufordelaktige* i den forstand at *i gjennomsnitt vil alle som deltar tape*. Men hvis en gevinst på 100 000 kroner f.eks. er verdt[3] mer enn tusen ganger hundrelappen i innsats, er det ikke nødvendigvis ufornuftig å delta.

[1] Sannsynligheten for at dette skal skje neste gang fire personer setter seg ned for å spille yatzy er ca 1 til 225 000.

[2] Dette skjedde den 1. mars 1950 i byen Beatrice i Nebraska, USA. Kormedlemmene mente naturligvis ikke at alle forsinkelsene denne dagen skyldtes tilfeldigheter, men heller "an act of God", som ukebladet Life skrev (27.mars 1950). Det finnes dessverre en lang rekke eksempler på bygninger som er blitt ødelagt uten at menneskeliv er blitt spart på lignende mirakuløse måter.

[3] Verdi i denne sammenheng er altså ikke knyttet direkte til pengebeløpene, men til hvordan personen som spiller oppfatter nytten av 100 000 kroner kontra nytten av 100 kroner.

Sannsynlighetsregningen er den grenen av matematikken som modellerer tilfeldigheter og som setter beslutningstakere i stand til å fatte gode beslutninger, når det hersker usikkerhet både om de ytre omgivelser og om konsekvensene av beslutningene. Det er lett å kritisere en beslutning i ettertid – når konsekvensene avdekkes.

Men hvis også de mulige negative konsekvensene var kjent på forhånd, sannsynligheten for at disse skulle inntreffe korrekt beregnet, og beslutningen likevel er vurdert som den beste, er etterpåkloke bemerkninger bare dumt. Men det er naturligvis *irriterende* når noe går fullstendig galt[4].

Følgende dilemma begynner etter hvert å bli godt kjent, det er en situasjon som er hentet fra amerikansk fjernsynsunderholdning[5].

Let's make a deal

Deltageren står framfor tre dører og hun skal velge en av disse, for så å få det som skjuler seg bak den valgte døren. Alle vet at det står en geit bak to av dørene og en bil (en Rolls Royce faktisk) bak den tredje, men av de to som står på scenen er det kun programlederen som vet hvilken dør bilen er bak.

En dør blir valgt tilfeldig (dvs. hver dør har en tredels sjanse for å bli valgt) og så skjer dette: Programlederen åpner en av de *andre* dørene og sier: ”Se her, her er det en geit. Vil du holde fast på den døren du har valgt, eller vil du bytte til den tredje døren?” Deltageren, som ikke er spesielt interessert i geiter, blir forvirret.

Hvis deltageren *vet* at programlederen åpner en dør med en geit bak, når hun har valgt bilen, og at han *ikke* ville åpne noen dør i det hele tatt hvis hun har valgt en dør som skjuler en geit, ja da er det naturligvis lett å vite hva deltageren bør gjøre. Tvihold på den valgte døren fordi programlederen forsøker å lure henne til å velge den andre døren og dermed en geit.

En annen mulighet er at programlederen har lyst til å bli kvitt bilen, og tilbudet om å bytte dør kommer først når deltageren har valgt *feil*. *Da* er det også opplagt hva deltageren bør gjøre. Hun burde absolutt skifte dør, hvis hun virkelig ønsker å vinne bilen.

Men det er faktisk slik at programlederen *alltid* åpner en dør med geit bak, *uansett* hvilken dør deltageren har valgt. Er det da opplagt at det vil lønne seg å bytte dør?

Hvis hun bytter dør, vil det være temmelig surt å oppdage at bilen er bak førstevalget. Uforstandige mennesker blant publikum ville karakterisere deltageren som en tosk hvis hun byttet bort bilen for en geit. Og *det* kunne nok være *mer* irriterende det, enn å holde fast på den valgte døren, og oppdage at den var feil. Men hvis vår venn blir fortalt at sannsynligheten for at bilen er bak den tredje døren er to tredeler, og at sannsynligheten for at førstevalget er rett fortsatt er en tredel, og hun da ikke bytter, ja da har hun ikke gjort den beste beslutningen. Nå ville *forstandige* mennesker se på henne som en tosk, men selvfølgelig la være å si det.

Sannsynligheten for at bilen er bak den tredje døren *er* faktisk dobbelt så stor som sannsynligheten for at den er bak den døren som er valgt[6].

Skulle det nå vise seg at det var galt å bytte, vil det likevel være feil å kritisere beslutningen, *den var rett*!

Daglig må vi alle treffe beslutninger hvor det hersker usikkerhet omkring både de ytre rammer, som f.eks. været eller ”fiendens” disposisjoner, og omkring konsekvensene av egne beslutninger.

Tippekupong

Hvis det f.eks. er snakk om å velge ut 96 ulike tipperekker, så kan dette gjøres på ufattelig mange måter, ca $4.4 \cdot 10^{399}$ måter. Begrenser vi oss til et system med fem halvgarderinger og en helgardering ($2^5 \cdot 3^1 = 96$), så har tipperen bare 982 102 968 ulike systemer å velge mellom[7]. Selv om han velger det systemet som han mener inneholder de rekkene som vil gi 12 rette med størst

[4] *I beslutningsteorien studeres ulike beslutningsprinsipper, blant annet minimax-prininsippet , som går ut på å innrette seg slik at de verst mulige konsekvensene blir minimert, dette er et konservativt prinsipp.*

[5] *Let's Make A Deal med Monty Hall som programleder*

[6] *Et lettfattelig og overbevisende argument er gitt Tverberg, H.: Om Cadillacer, fødselsdatoer, geiter og statsministre. Tangenten, 1996, hefte 1. Det vil ikke være rett overfor leseren å videreformidle dette her, slik uten videre.*

[7] *Det er ikke naturlig å gjøre rede for hvordan man kommer fram til disse tallene her.*

sannsynlighet vil det – fra kupongen er levert inn til siste kampen er slutt – herske usikkerhet omkring antall rette som systemet gir.

Men i tillegg er det usikkerhet knyttet til premien. *Den* avhenger ikke bare av kamputfallene men også av hvordan *de andre* har tippet.

Ved å delta ukentlig (eller skyggetippe) med 96-rekkers kuponger er det mulig å vurdere hvordan ulike tippestrategier vil virke. Eller man kan studere historiske data[8].

I forbindelse med beslutningsproblemer hvor det er vanskelig – for ikke å si umulig – å gjennomføre en fullstendig analyse, kan man forsøke å lage en mest mulig realistisk modell av situasjonen og *simulere* de usikre elementene gjennom enten terningkast eller ved hjelp av tilfeldige tall generert på en datamaskin. Vi snakker i så fall om en *simuleringsmodell*.

<u>Simulering, estimering, konfidensintervall og hypotesetesting</u>

La det være sagt med en gang, det er ingen som helst grunn til å skulle "bevise" med simuleringer at det lønner seg å bytte dør i "Let's make a deal"-problemet. Sannsynligheten for å vinne premien er $\frac{2}{3}$ ved å bytte dør og $\frac{1}{3}$ ved å holde fast på døren som først ble valgt. Likevel kan det være nyttig – for å illustrere hvordan simuleringer brukes, og for å si noe om kvaliteten på simuleringsresultater generelt.

Simuleringsalgoritmen som er vist til høyre er en noe mer formalisert beskrivelse av situasjonen, den gjør punktvis rede for opplegget på en måte som gjør det lettere å lage et dataprogram for problemet. Og det kreves ikke mye fantasi for å innse at simuleringer krever datakraft. Hvem gidder, på ramme alvor, å gjennomføre 1000 slike spill?

Men det er noe som *mangler* i simuleringsalgoritmen, og det er *strategien* med hensyn til hva man skal gjøre i punkt 7. Skal man beholde den valgte døren eller skal man bytte?

Det fine er nå at vi kan gjennomføre simuleringen (de 1000 forsøkene) *flere ganger*, med *ulike* strategier hver gang, og så få en pekepinn om hvilken som er best[9].

Simuleringsalgoritme

Martin har sagt seg villig til å prøve seg som deltager i "Let's make a deal" i 1000 forsøk vel vitende om at han slett ikke vil få en eneste Rolls Royce.

Tilfeldige valg mellom tre alternativer kan f.eks. gjøres ved terningkast, velg alternativ 1 hvis terningen viser 1 eller 2, velg alternativ 2 hvis terningen viser 3 eller 4 og velg alternativ 3 hvis terningen viser 5 eller 6.

1. 0 → S. S teller antall ganger Martin vinner.
Til å begynne med er S = 0.

2. 0 → N. N teller antall ganger Martin har forsøkt seg. 1000 forsøk totalt. Til å begynne med er N = 0.

<u>Løkke starter</u>

3. Velg en tilfeldig dør A, B eller C, som skal skjule Rolls Royce-en

4. Martin velger tilfeldig mellom A, B og C.

5. **A.** Hvis Martin har valgt rett dør: R = 1
Programlederen velger tilfeldig å åpne en av de andre dørene.
B. Hvis Martin har valgt feil dør: R = 0
Da er det bare en dør programlederen kan åpne, denne åpnes.

6. Programlederen åpner den valgte døren og spør om Martin vil bytte.

7. **A.** Martin svarer "Nei".
1. S+R → S (S økes med 1 hvis Martins opprinnelige valg var rett)
B. Martin svarer "Ja".
1. S+1–R → S (S økes med 1 hvis Martins opprinnelige valg var feil)

8. N+1 → N (tellevariabelen for antall simuleringer øker med 1

9. Hvis N < 1000 gå til 3.

<u>Løkke slutter</u>

10. Skriv ut S, antall ganger Martin har vunnet.

---

[8] *Se Rygg, M. & Stordahl, K.: Tipp bedre, vinn mere. Dreyer 1979.*

[9] *Det å skulle vurdere hvordan ulike beslutningsstrategier vil virke i praksis, er en viktig anvendelse av simuleringsmetodikken.*

Strategien kan være enten en av de rene strategier;
A: *Aldri bytt dør* eller **B**: *Alltid bytt dør,*
eller en *blandet strategi*:
C: *Bytt dør med sannsynlighet p*, hvor *p* kan være hvilket som helst tall mellom null og en.

Simuleringen er gjennomført med strategi **A**. Den vinner i $x = 342$ av i alt $n = 1000$ tilfeller. Vi vil naturligvis *estimere*[10] vinnersannsynligheten p_A til $\hat{p} = 0.342$. Estimatet 0.342 ligger så nær verdien $\frac{1}{3}$ at det virker troverdig at p_A er lik $\frac{1}{3}$.
Men det er naturligvis en viss usikkerhet knyttet til estimatet og den kan kvantifiseres ved at vi regner ut et såkalt 95 % *konfidensintervall* for p_A.

Det vil si et intervall som er regnet ut etter en formel som er slik at intervallet vil med 95 % sannsynlighet inneholde den *sanne verdien på* p_A.

Formelen for intervallet er:

$$\left[\hat{p}_A - 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}_A(1-\hat{p}_A)}{n}},\ \hat{p}_A + 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}_A(1-\hat{p}_A)}{n}}\right]$$

Det utregnete intervallet basert på 342 gevinster i 1000 forsøk blir: [0.3126, 0.3714].

Dette intervallet er ikke i nærheten av å inneholde verdien ½, så resultatet av simuleringen gir dermed lite grunnlag for å hevde at p_A er lik ½.

Hypotesen om at p_A er lik ½ forkastes[11].

ANVENDELSER

Opprinnelsen til sannsynlighetsregningen var hasardspill med terninger, tidlig på 1500-tallet[12]. Man hadde selvsagt spilt med terninger og fundert på vinnermuligheter lenge før dette, men det er først nå, og i de etterfølgende 200 år at det skjer store fremskritt. Ett av de aller tidligste, ikke-trivielle problemer var følgende:

Pacciolis problem
To personer A og B spiller en serie rettferdige spill (hvor begge har like store sjanser for å vinne), og de har bestemt seg for å spille til en av dem har vunnet seks spill. Denne personen får hele innsatsen. Men så blir spillet avbrutt i det A har vunnet 5 ganger og B har vunnet 3 ganger, og spørsmålet er: "Hvordan skal innsatsen fordeles mellom A og B?".

Problemet ble beskrevet av Fra Luca dal Borgo (Paccioli) i et arbeid fra 1494, men det skulle gå ca 150 år før problemet ble korrekt løst. Pacciolis svar – at innsatsen skulle deles i forholdet 5:3 – ble avslørt som feil i 1556[13].

Fremdeles er gambling sentralt innen faget sannsynlighetsregning. Boktitler som *How To Gamble If You Must* og *The Theory of Gambling and Statistical Logic*[14] er bare to titler som vitner om dette. Pokerspillere og bridgespillere som ikke opererer som rendyrkete amatører kjenner sannsynlighetene for en lang rekke kortfordelinger og bruker disse for å gjennomføre optimale spill med kortene som er gitt.

Sannsynlighetsregning i andre fag
Etter hvert har sannsynlighetsregningen og den *matematiske statistikk* funnet anvendelser på de fleste fagområder.

Livsforsikring og skadeforsikring, dødelighets- og levetidsanalyser innen befolkningslæren, finansiering og investering, meningsmålinger og markedsundersøkelser er bare noen av fagfeltene som vet å benytte sannsynlighetsmodeller.

Økonometri handler om statistiske analyser av økonomiske data, og fag som kjemometri, biometri og psykometri vitner om at usikkerhet også blir behandlet seriøst innen kjemi, biologi og psykologi[15]. Arkeologer, ingeniører, leger, landbrukskandidater og samfunnsvitere har alle, i løpet av utdannelsen, sannsynlighetsregning og statistikk på timeplanen.

---

[10] *Å estimere er det tekniske uttykket for å anslå. Anslagsverdien kalles et estimat. Estimater symboliseres med en ^ over bokstaven (eller symbolet) for den størrelsen som estimeres.*

[11] *Vi tester nullhypotesen H_0: $p_A = p_0$ mot alternativhypotesen H_1: $p_A \neq p_0$, med 5 % signifikansnivå, ved å regne ut et 95 % konfidensintervall for p_A og så forkaste H_0 dersom intervallet ikke inneholder p_0. Denne metoden sikrer oss at sannsynlighetene for å forkaste H_0, når H_0 er rett, er mindre enn eller lik 0.05.*

[12] *Den franske matematikeren Pierre Laplace skrev i sin Theorie Analytique des Probabilittés (1812): "Det er bemerkelsesverdig at en vitenskap som startet med å studere hasardspill har utviklet seg til å bli det viktigste element i menneskelig kunnskap". En fornøyelig introduksjon til sannsynlighetsregningens historie er gitt av J. S. Rønnevik i artikkelen Dårenes sammensvergelse i Dogwatch, nr. 4 – 2003.*

[13] *Person B vinner hvis han vinne de tre neste spillene, sannsynligheten for det er en åttendedel (½ x ½ x ½).*

[14] *L. Dubins & R. Savage: How to Gamble If You Must. McGraw-Hill (1965) er en "tung" matematikkbok, hvor en lekmann vanskelig kan forstå at tittelen er dekkende for innholdet. Richard A. Epstein: The Theory of Gambling and Statistical Logic. Academic Press (1971) derimot, er nærmest en håndbok for en lang rekke hasardspill .*

Filologene klarer seg tilsynelatende uten. Men statistiske frekvensanalyser over bokstaver og ord i tekster med ukjent opprinnelse har gjort forskere i stand til – med stor grad av sikkerhet – å fastslå opphavsmannen, eller om ikke annet å tidfeste teksten.

Et velkjent eksempel på dette er de såkalte *"føderalist artiklene"* som ble offentliggjort i flere New York-aviser i 1787 – 1788. Disse ble skrevet for å forklare den jevne mann hva den nye forfatningen gikk ut på, og for å få folk til å støtte opp om den. Artiklene ble skrevet under pseudonymet "Publius" av James Madison, Alexander Hamilton og John Jay. Det har opp gjennom tidene herskert tvil om hvem som egenlig skrev 12 av disse artiklene, for de resterende 73 er man temmelig sikker på hvem opphavsmannen er. Men statistiske analyser av tekstene viser med en overveldende stor grad av sikkerhet at alle 12 er skrevet av Madison[16] – dette til tross for at Hamilton i ettertid hevdet at han hadde skrevet noen av dem.

Frekvensanalyser har også vært et viktig hjelpemiddel for kodeknekkere[17].

Fra midten av det 20. århundret, og parallelt med datamaskinenes fantastiske utvikling, har det vokst fram et stadig mer realistisk håp om at vi mennesker skal kunne snakke med maskinene. I den forbindelse har faget datalingvistikk (språk- og talebehandling/gjenkjenning) vokst fram.

> *"Probabilistic models are crucial for capturing every kind of linguistic knowledge. Each of the other models (state machines, formal rule systems and linguistic) can be augmented with probabilities. For example, the state machine can be augmented with probabilities to become the … Markov model."*[18]

Vi skal heller ikke glemme *kvantestatistikken*, som har vokst fram av kvantemekanikken gjennom det 20. århundret, og som også har funnet anvendelser i atomfysikk, kjernefysikk og elemenærpartikkelfysikk[19].

Risiko- og usikkerhetsvurderinger er svært viktige i offshoreutbyggingen og for all ferdsel. Posisjonsbestemmelse med GPS[20] benytter metoder fra sannsynlighetsregning og matematisk statistikk.

Operasjonsanalyse

Operasjonsanalyse har vokst fram som et eget fag etter andre verdenskrig, men det hele startet med effektivitetsvurderinger i det engelske flyvåpenet (RAF). Både marinen og hæren fattet tidlig interesse for metodene. Etter hvert har spesielt US Navy fått en ledende stilling innen faget operasjonsanalyse.

Det handler om å vurdere usikkerhet og beregne sannsynligheter i forbindelse med strategiske vurderinger f.eks. sannsynligheter for de mulige utfall i kamp mellom to styrker eller optimal sammensetning av en konvoi.

> *"Hva mener du egentlig med en dyktig hærfører?" spurte fyrst Andrei hånlig. "En dyktig hærfører," svarte Pierre, " er vel den som forstår å regne med tilfeldigheter . . . og gjetter fiendens planer".*[21]

I taktiske analyser omkring søk etter miner og undervannsbåter er usikkerhetsberegninger av største betydning.

> *"The science of detection, as a branch of naval tactics, seeks solutions to problems of contacting and tracking hostile forces or forces presumed to be non-friendly. This branch of tactics achieves its end through the application of engineering, physics, mathematics and statistics. Its conclusions are stated in terms of probability – the probability of detection."* [22]

---

15 *"Fagfeltet bioinformatikk er sannsynligvis det hurtigst voksende innen dagens naturvitenskap. … Feltet er vokst frem ved erkjennelsen av at biologien må begynne å ta i bruk matematikk, statistikk og innfor-matikk i langt større grad dersom den skal greie å gjøre substansielle nye fremskritt" sier Stig W. Omholt i Matematikk+Biologi=Sant, i Dagbladet av 20.mai 2002.*

16 *Mosteller, F. & D. L. Wallace: Inference and Disputed Authorship: The Federalist, Series in Behavioral Sciences: Quant. Meth. Addison-Wesley (1964).*

17 *En spennende framstilling av historien om koder er gitt i Simon Singh: Koder. Aschehoug (1999).*

18 *Jorafsky, D. & J. H. Martin: Speech and Language Processing. 2. ed. Prentice Hall. 2009.*

19 *To norske fysikere; Jon Magne Leinaas og Jan Myrheim, har klart å gi en generell sannsynlighetsteoretisk overbygning for to av kvantefysikkens modeller, de såkalte Bose-Einstein og Fermi-Dirac modellene.*

20 *Global Positioning System, som er et satelittnavigasjonssystem.*

21 *Leo Tolstoj : Krig og fred. Bind III 1869. Norsk oversettelse ved Erik Krag, Gyldendal Norsk Forlag A/S, 1968.*

22 *Garrett, R. A. & London J.P.: Fundamentals of Naval Operations Analysis. United States Naval Institute, Annapolis, Maryland. 1970.*

Lanchesters kampmodeller, som opprinnelig[23] ble formulert deterministisk, har i den senere tid blitt utvidet til svært så avanserte stokastiske modeller.[24]

Sannsynlighetsregning er viktig for å studere funksjonssannsynligheter i forbindelse med våpen og ammunisjon, når det gjelder torpedoer og missiler – både det å avfyre og å unngå slike. Sannsynlighetsregning brukes i konstruksjon og design av båtskrog, for eksempel for å vurdere hvor i fartøyet framdriftsmaskineriet bør plasseres.

Faget operasjonsanalyse spiller en viktig rolle når det gjelder håndtering av reservedeler og ved vurderinger omkring driftssikkerhet, og på en rekke andre områder. I dag vil enhver seriøs utdanning innen både økonomi og militært lederskap inkludere et kurs i operasjonsanalyse[25].

Forventet levealder

Utsnittet av avisartikkelen som er gjengitt nedenfor[26] handler om *forventet levealder*. Prognosene som blir gitt er beheftet med stor usikkerhet, men *det* kommer ikke fram i artikkelen.

> *"Nordmenn vil også i fremtiden ligge helt i toppen når det gjelder forventet levealder. Nyfødte barn lever i dag to år lenger enn for bare ti år siden. Frem til 2005, vil Norge fortsatt ligge blant landene med den desidert høyeste levealderen. Det viser anslag fra FN. Jenter født i 2000 forventes å bli 81,4 år, mens gutter født samtidig kan forvente å leve til de er 76 år".*

La oss ikke henge oss opp i den meningsløse setningen: *"Nyfødte barn lever i dag to år lenger enn for bare ti år siden"*, vi forstår selvsagt at det er snakk om *forventet levetid*. Men hvordan kommer man fram til slike prognoser? Jo da trenger man anslagsverdier eller estimater[27] for sannsynlighetene px for at en person skal dø mens det ennå er x år, for $x = 0, 1, 2, \ldots$. Og så – hvis man antar at alle dør midt mellom to fødselsdager – kan man regne slik[28]:

Forventet levetid =

$0.5\cdot p_0 + 1.5\cdot p_1 + \ldots + 99.5\cdot p_{99} + 100.5\cdot p_{100} + \ldots$

Det endelige svaret på hvor gode prognosene er fås først en gang langt inn i framtiden. Skal det treffes beslutninger på grunnlag av slike prognoser, vil det være nødvendig å vurdere usikkerheten i tallene, samt konsekvensene av at de kan være både for optimistiske og for pessimistiske. *Dette* krever innsikt i stokastisk modellbygging, statistisk estimering og beslutningsanalyse.

Leseren vil nok kunne finne at de problemstillingene som tar opp her er enkle, kanskje *for* enkle, og til og med noe naive. Men slike eksempler *er* viktige, fordi man ofte kan belyse temmelig generelle problemstillinger med nettopp enkle modeller.

Realistiske modeller kan ofte føre for langt inn i andre fagområder som den alminnelige leser ikke har kunnskaper om. Dette til tross, vi vil hente enkle eksempler fra en noen ulike konkrete anvendelser, for å vise spennvidden i stokastisk modellering.

Et enkelt og naivt, men likevel illustrerende, eksempel kommer her.

Stopp i tide

En gambler får utlevert en terning etter at han har gjort den innsatsen som kreves, for eksempel 10 kroner. Og så får han kaste terningen, enten til han velger å stoppe frivillig eller til han får en ener. Hvis han stopper *før* eneren dukker opp får han utbetalt summen av alle terningkastene i kroner. Ellers får han ingenting.

Anta for eksempel at det første kastet gir en sekser. Han kan nå enten få utbetalt seks kroner (og dermed ha tapt fire) eller kaste terningen en gang til, og *risikere* å miste de seks kronene han tross alt har – det skjer hvis terningen viser en ener i neste kast. Men han kan jo også øke sitt tilgodehavende, om terningen viser noe annet enn en ener. Spørsmålet nå er om det finnes en *optimal strategi* for dette spillet:

Finnes det et tall x, slik at om poengsummen er *mindre enn x* så vil det lønne seg å kaste en gang til, mens hvis poengsummen er *større enn x* lønner det seg å stoppe?

[23] *F. Lanchester: Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm. Constable and Co. Ltd. London 1916*

[24] *K. Hausken & J.F. Moxnes: The Microfoundations of the Lanchester War Equations. Military Operations Research, vol. 5 (2000), no. 3.*

[25] *Det er kun logistikklinjen ved Sjøkrigsskolen som har hatt operasjonsanalyse som fag. Fra og med høsten 2014 har også ingeniørene fått inn emner fra operasjonsanalysen i faget Matematikk 3. Operasjonsanalyse hander ikke utelukkende om sann synlighet, men om en rekke ulike optimeringsmodeller og metoder. Disse er både stokastiske og detrmininstiske. Ofte er økonomiske vurderinger et viktig element i modellene. Det er mange som mener at også kadettene på Operativ linje burde vært kjent med faget.*

[26] *T.O. Mørseth: Lever lenge – også i fremtiden. Bergens Tidende, 9. juli, 2001.*

[27] *Hvordan man kommer fram til estimatene på p0, p1, . . . hører ikke hjemme akkurat i denne sammenheng.*

[28] *Vel, dette er en forenklet måte. Statistisk Sentralbyrå gjør det noe mer avansert.*

Og videre: "Hvor mye kan gambleren regne med å vinne/tape per spill i det lange løp?" og "Hvilken innvirkning har innsatsbeløpet på optimal strategi?".

Det blir ikke gitt noen svar på disse spørsmålene ennå, men leseren kan jo stoppe opp et øyeblikk og forsøke å tenke gjennom dem. Det vil kanskje være på sin plass å finne fram en terning og prøve med ulike *stoppstrategier*, for å se om det er noen som virker bedre enn andre[29].

Dette eksemplet – i all sin enkelhet – vil kunne gi innsikt i høyst reelle, og langt mer kompliserte problemstillinger. For eksempel, en bolig legges ut for salg og eierens problem er: *Når skal han akseptere et inngitt bud på boligen?*

Det er jo gjerne slik at en ønsker å oppnå mest mulig, og et gitt bud har ofte en viss tids-begrensning. Det er alltid en viss fare for å forkaste det høyeste bud, hvis en har urealistiske forventninger om fremtidige bud. Men ved å akseptere et bud risikerer en jo også å gå glipp av et høyere bud i framtiden. (Selv om en neppe får kjennskap til det.)[30]

RISIKO, SANNSYNLIGHET OG FORVENTNING

Ord *som tilfeldigheter, usikkerhet, sjanser, sannsynlighet, risikere og forventninger* er allerede brukt, i trygg forvissning om at dette er ord som betyr noe for leseren. Men om de er meningsfylte, så vil de neppe bety nøyaktig det samme for alle. Noen oppfatter f.eks. *risiko* og *sannsynlighet* som synonymer.

Risiko[31] (av it.) uvisst utfall, fare for tap eller uberegnelig utfall av tiltak.

> *Risiko og usikkerhet blir ofte definert som komplementære størrelser, slik at den ene størrelse kan beregnes ut fra den andre. Høy risiko tilsvarer lav sikkerhet og omvendt. I økonomisk virksomhet må man alltid regne med en viss risiko, f.eks. mangel på kjøpere til varer, uhell under produksjon osv. Da risiko ikke lar seg forutberegne, kan man i en kalkyle bare ta hensyn til risiko ved å vurdere forsiktig.*
>
> *Gjennom forsikring søker man å bytte ut den uberegnelige risiko med beregnelige kostnader (forsikringspremien). I forbindelse med ulykker betegner risiko i hvilken grad det ventes at ulykker vil skje; sannsynlighet for at ulykker skjer; forventet tap på grunn av ulykker.*
>
> *For å gi mening må begrepet risiko knyttes til ulykkens konsekvens.*
>
> *Derfor snakkes det ofte om risiko for (tap av) menneskeliv og helse; risiko for (tap av) materielle verdier; risiko for (tap av) miljøverdier.*
>
> *Ved angivelse av risiko må graden av eksponering, dvs. hvor mange eller hvor mye er utsatt for faren og over hvor lang tid, også angis.*

Var det noe slikt *du* tenkte på i forbindelse med risiko? Vi skal senere definere risiko i tråd med siste del av forklaringen ovenfor, ved å trekke inn både sannsynligheter og konsekvenser.

Risiko eller sannsynlighet?

Et noe forvirrende leserinnlegg sto på trykk i Bergens Tidende, den første august 2002:

> *Risikologikk: Militærets astronomer anbefaler utviklingen av utstyr for å tilintetgjøre en asteroide, som med en risiko på 1 til seks millioner vil ramme jorden. Til sammenligning anbefaler atomkraftindustrien oppførelse av nye reaktorer med samme risiko for eksplosjon.*

La oss minne om Store Norske Leksikons beskrivelse av risiko:

> *Ved angivelse av risiko må graden av eksponering, dvs. hvor mange/mye er utsatt for faren og over hvor lang tid, også angis.*

Tallet *1 til 6 millioner,* som er knyttet til asteroiden, er sannsynligvis *sannsynligheten* for at asteroiden vil treffe jorden i 2017 (eller når det var). *Konsekvensene* av at asteroiden skulle treffe oss er neppe tatt med i dette tallet.

---

29 *Tenk deg en terning som blir kastet inntil den har vist fem enere, og som produserte disse resultatene: 6, 5, 1, 4, 5, 3, 2, 5, 6, 1, 4, 1, 2, 5, 3, 1, 4, 2, 2, 2, 5, 6, 1.En person som har 5 som stoppkriterium vil få utbetalt 6, 5, 0, 9, 5, 5, 6, 0, 0, 7, 0, 6, 9, 6 og 0, som gir et gjennomsnitt på 4.27. En annen person med 11 som stoppkriterium ville innkassert 11, 0, 12, 13, 0, 0, 0, 15 og 0, som gir et gjennomsnitt på 5.67 per spill, mens en person som stopper på 20 eller mer får utbetalt 0, 25, 0, 0, 0, 21 og 0 og 6.58 i gjennomsnitt. Med en innsats på 10 kroner per spill fører alle de tre foreslåtte stoppstrategiene til at spilleren taper!*

30 *I så vel matematisk statistikk som i økonomi og i søkteori/leteteori får man ofte bruk for en del av matematikken som kalles Optimal Stopping, som handler når nok er nok. Det klassiske eksemplet i litteraturen er The Secretary Problem, som også kan formuleres som «Bensinstasjonsproblemet». Du må fylle drivstoff i løpet av de neste tre milene. Langs veien ligger det tre bensinstasjoner med varierende priser, men du vet ikke hvilken som har den laveste pris. Hvordan skal velge stasjon for å ha størst sannsynlighet for å fylle på den som er rimeligst? (Det forutsettes at du ikke kan kjøre tilbake når du først har valgt å kjøre forbi en stasjon). Løsningen blir ikke gitt her.*

31 *Fra Store Norske Leksikon, Kunnskapsforlaget, 2000. Mye av denne forklaringen kan virke forvirrende. Det er det siste avsnittet som er i best overensstemmelse med den definisjonen som presenteres senere i dette avsnittet.*

Tidsspennet det er snakk om når det blir hevdet at risikoen for en eksplosjon i en ny atomreaktor også er en til seks millioner, er noe uklart – kanskje er det reaktorens levetid? Det kan også tenkes at innsenderen mener at *sannsynligheten* for at reaktoren skal, før eller senere, eksplodere er 1 til 6 millioner.

Risiko for folk flest

Det er gjort en del undersøkelser omkring hva *den jevne mann og kvinne* legger i begreper omkring usikkerhet og tilfeldigheter. I en av disse – fra 1991 av Drottz-Sjöberg – sier nesten halvparten av de intervjuede personene at *risiko er hovedsakelig et spørsmål om sannsynlighet.* Den andre halvparten deler seg i tre omtrent like store grupper. En gruppe *knytter risiko hovedsakelig til konsekvensene*, en annen gruppe er enig i at *risiko er en kombinasjon av sannsynlighet og konsekvenser* og en *tredje gruppe er ikke enige i noen* av de tre foreslåtte definisjonene av risiko.

Wibecke Brun gir en glimrende oversikt over hva som er gjort av undersøkelser på dette området i doktorgradsarbeidet sitt.[32] Hun viser blant annet til at enkelte setter likhetstegn mellom ”risiko” og *”det er en viss sjanse for at noe vil inntreffe”*.

Brun er av den mening at det er viktig – for kommunikasjonen mellom menneskene i det moderne samfunn – at vi har et *felles* begrepsapparat.
Hun sier:

> *"For effective risk management and communication in a modern society, experts, laypeople and political authorities must be able to share the same frame of reference."*

Forskningssjef André Teigland ved Norsk Regnesentral er nok av samme mening, noe følgende klipp[33] viser:

> *”Risiko er et (annet) begrep det kan være vanskelig å forstå. I min hjemkommune fant politikerne for et par år siden at det ville være lurt å få høyere forventet avkastning på kommunens penger. Ved å plassere pengene i aksjer ville de få forventet avkastning på 12 % istedenfor i banken 6 %. Riktignok var risikoen høyere på aksjemarkedet, men likevel. Hva høyere risiko faktisk betyr tror jeg neppe hverken de eller mange andre var klar over. Når du i utgangspunktet har nok penger til å dekke goder vi er avhengige av kan en forventet avkastning på 6 % med la os si min. 4 % og max. 8 %, kanskje være smartere enn en forventning på 12 % med min. –25 % og max. +30 %? Hos oss endte det med nedleggelse av barneskoler."*

Sannsynlighet

Vi skal ikke definere sannsynlighet på annen måte enn som et rent abstrakt matematisk begrep, og så får vi heller godta at det hersker flere ulike oppfatninger av hva sannsynlighet *er* og hvordan sannsynligheter skal *tolkes*.

For eksempel, i forbindelse med vurdering av et minefelt vil et utsagn som det nedenfor være uproblematisk for alle som er fortrolige med sannsynlighetsregning[34].

> *”Sannsynligheten for å påføre fienden en tapsandel på 50 % eller mer, er minst lik 90 %.."*

Når derimot skipssjefen på et fartøy skal vurdere sannsynligheten for at et bestemt sund er minelagt vil *det* kunne være mer kontroversielt. Dette henger nettopp sammen med at det eksisterer ulike oppfatninger av hva sannsynlighet er og hvilke typer begivenheter man kan knytte sannsynligheter til.

De ulike oppfatningene har tidligere ført til nærmest uoverstigelige gap mellom enkelte fagmiljøer. Hva dette består i skal vi se nærmere på etter hvert.

Vi skal først diskutere sannsynlighet med utgangspunkt i noen spørsmål knyttet til problemstillinger de fleste kan tenkes å ha et forhold til. Prøv å tenke gjennom hvert enkelt spørsmål og forsøk å gi et svar, hvis du føler at spørsmålet er meningsfylt da?

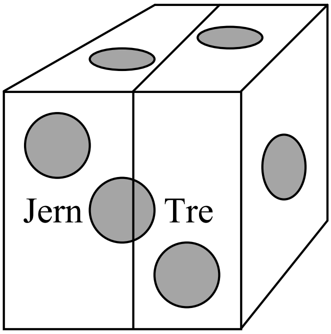
1. Hvor stor er sannsynligheten for at en standard yatzyterning vil vise seks øyne opp, når den trilles på et stort bord?
2. Jeg sitter ved skrivebordet mitt, med en rød terning og en grønn terning foran meg.
   (i) Hvor stor er sannsynligheten for at den grønne terningen viser 6 når den trilles?
   (ii) Nå har jeg trillet den. Hvor stor er sannsynligheten for at den viser 6?
3. Hvor stor er sannsynligheten for at Roma ligger lengre sør enn Beijing?
4. Hvor stor er sannsynligheten for at Liverpool skal slå Manchester United, neste gang de møtes til ligakamp på Anfield Road?
5. To fotballag (du får ikke vite hvilke) har spilt uavgjort 5 – 5. Hvor stor er sannsynligheten for at hjemmelaget aldri har ledet i denne kampen?

Er du klar?

[32] Wibecke Brun: Subjective conceptions of uncertainty and risk. Det Psykologiske Fakultet, Universitetet i Bergen. 1995.

[33] André Teigland i Tilfeldig Gang, nr. 1, årgang 20. februar 2003.

[34] Se Svortdal, O.K., Mineinnsats i sjøkrigen. Institutt for forsvarsstudier.



<u>*1: En terning – Like sannsynlige utfall*</u>
Godt, da slår vi uten videre fast at de aller fleste vil si at svaret på spørsmålet er en sjettedel. Begrunnelsen vil være at terningen er symmetrisk og det er ingen grunn til å tro at en side vil ha større sannsynlighet enn en annen side. De seks sidene antas altså å ha like store sjanser for å bli vist opp og derfor er sannsynligheten for å få nettopp seks lik 1 av 6. (Dette er det samme som å si at oddsen er 1 til 5, ett gunstig utfall og fem ugunstige.) Et videre resonnement er ofte:

> *I det lange løp, dvs. hvis terningen kastes mange ganger, vil den vise seksersiden opp i ca en sjettedel av gangene. Selvsagt vil det bare være flaks om andelen blir nøyaktig lik en sjettedel for et bestemt antall kast, men ettersom antall kast blir flere og flere vil andelen bli nærmere og nærmere den teoretiske sjettedel.*[35]

Måten med å argumentere for like sannsynlige utfall er faktisk det eldste forsøket på å definere sannsynlighet.

Men en slik definisjon har åpenbart en stor ulempe. For hvis vi i stedet for en standard yatzyterning triller en terning som *ikke* er laget av et homogent materiale, men f.eks. er limt sammen av to halvdeler, en av jern og en av tre, med eneren plassert på den flaten som i sin helhet er av tre, og sekseren på motsatt side, da ville det ikke lenger være naturlig å tro at sekseren og eneren skulle være like sannsynlige. Jeg gjetter på at ganske få forsøk med å trille terningen ville overbevise de fleste om at eneren er langt mer sannsynlig enn sekseren. Sidene merket med to, tre, fire og fem øyne kan nok fortsatt antas å være like sannsynlige.

Men at sannsynligheten for hver av disse sidene fortsatt skulle være en sjettedel er det ingen som helst grunn til å anta.

<u>*2(i): En rød og en grønn terning – Frekventistisk sannsynlighet*</u>
Hvis du også på spørsmål 2 gikk ut i fra at sannsynligheten for at den grønne terningen vil vise seks øyne opp er lik en sjettedel, kan det hende du nå vil være av en annen opp-fatning. *Jeg* vet nemlig at *både* den røde og den grønne terningen er forfalsket, en av dem har en tendens til å produsere en overvekt av seksere og den andre vil gi en overvekt av enere.
Men *det* hjelper verken deg eller meg til å tallfeste sannsynligheten.

En mulig måte å komme opp med en tallverdi for sekersannsynligheten p på, vil være å kaste terningen et stort antall ganger (N) og så telle opp antall ganger sekseren inntreffer (n). Deretter brukes den relative frekvensen n/N til å tallfeste p. Det virker liksom så riktig at $n/N \approx p$, når N er stor. Dette er en slags intuitiv følelse de fleste av oss har overfor sannsynligheter og tilfeldige forsøk av denne typen. Det vil si forsøk som kan gjentas et ubegrenset antall ganger, under identiske betingelser fra forsøk til forsøk. Men å definere *begrepet sannsynlighet* som grenseverdien for n/N, når N går mot uendelig *er* umulig. Hvordan vet vi at grenseverdien vil eksistere? Det er fullt mulig å tenke seg utfall på terningen som gjør at n/N konvergerer til 0, andre utfall som gjør at det relative forhold konvergerer til 1 og en hel mengde utfall som gjør at forholdet ikke nærmer seg noen grenseverdi i det hele tatt. At n/N med stor *sannsynlighet* vil nærme seg en grenseverdi p er mager trøst når hensikten er å definere, ja nettopp, sannsynlighet.

Vi kan ikke bruke sannsynlighet til å definere sannsynlighet!

Dette er en av grunnene til at vi skal la sannsynlighet være et abstrakt matematisk begrep. Den matematiske definisjonen av sannsynlighet, som ikke blir presentert her, *vil* medføre at den *relative frekvens* n/N *konvergerer til p, med sannsynlighet lik en.*[36]

<u>*2(ii): Terningen er kastet – Sannsynlighet versus sikkerhet*</u>
På det første spørsmålet er altså et mulig svar at: "Sannsynligheten for at den grønne terningen viser seks øyne opp er p, ett eller annet tall mellom 0 og 1".

Og det er kanskje også svaret på det andre spørsmålet?

For meg, som ser hvilken side terningen viser, er p lik 0 eller 1. Men du holder kanskje fast på den ukjente p?

[35] *Dette er den folkelige varianten av De store talls lov. Vi kommer tilbake til den straks.*

[36] *Dette er en noe mer presis variant av De Store Talls Sterke Lov, som egentlig er et svært avansert matematisk resultat. En ytterligere presisering av loven er gitt i fotnote 45.*

3: Roma vs Beijing – Sannsynlighet versus uvitenhet

Spørsmålet "Hvor stor er sannsynligheten for at Roma ligger lengre sør enn Beijing?" vil de fleste forstandige mennesker først avfeie som visvas. Det er ikke meningsfylt å snakke om sannsynligheter i denne sammenhengen. For det første er ikke spørsmålet knyttet til noe tilfeldig eksperiment som kan gjentas flere ganger og dernest er det jo bare å studere en litt stor globus, for å få svar. *Enten* ligger Roma lengre sør enn Beijing *eller* så gjør den det ikke!

Men vent litt; hvorfor er det ikke like *meningsløst* å spørre etter sannsynligheten for at en terning viser seks øyne opp, *etter* at den er blitt kastet? Det tilfeldige element er borte, og det som gjenstår er, på samme måte som tilfellet Roma vs. Beijing, rett og slett uvitenhet.

Til tross for det, det skjulte terningkastet er utfallet av en tilfeldig mekanisme, på en langt mer iøynefallende måte, enn plasseringen av to bestemte byer på globusen. Det at terningkastet kan avsløres, terningen kastes på nytt og at *da* er sannsynligheten for at resultatet er lik seks en sjettedel (eller den ukjente p, hva nå enn denne måtte være) gjør det naturlig å akseptere at det finnes en objektiv sannsynlighet for at terningen viser en sekser.

4: Liverpool versus United – Subjektiv sannsynlighet

I spørsmål 4, hvor det spørres etter sannsynligheten for at Liverpool slår Manchester United, finnes det så definitivt ingen objektiv sannsynlighet for at Liverpool skal vinne. Men likevel aksepterer de fleste av oss at fotballeksperter tallfester sannsynligheten for at så skjer. Et Liverpool-fan ville kanskje sette sannsynligheten til 0.8, mens en United-tilhenger som har nøyaktig den samme informasjonen om tidligere resultater, lagoppstil-linger, formkurver og lignende, godt kunne gi sannsynligheten 0.8 til at Manchester United vinner. Her står vi jo også overfor et "eksperiment" som heller *ikke* lar seg gjenta flere ganger under identiske betingelser. Skulle vi fornekte bruken av sannsynligheter i denne situasjonen?

Nei så visst ikke! Hvis vi bare kan gi en fortolkning av hva sannsynligheter betyr i *denne sammenhengen*, vil vi også akseptere bruk av sannsynligheter i *slike situasjoner,* og også *godta at to personer har helt ulike verdier på samme sannsynlighet.*

En vanlig måte å tolke sannsynligheter på i slike situasjoner er å knytte sannsynlighetene til "oddsutbetalinger", og si at en person som opererer med 0.8 i vinnersannsynlighet for sitt lag ville være villig til å satse inntil 8 kr på at laget vinner og motta en gevinst på 2 kroner hvis så skjer. Fordi: *Om* det var mulig å realisere en lang rekke kamper – under like forhold – mellom disse to lagene, ville vår mann regne med at i 80 av 100 tilfeller ville laget hans vinne og han ville sope inn 2 kroner hver gang, det vil si totalt 160 kroner. I 20 av tilfellene ville han tape innsatsen[37] på 8 kroner og det blir også 160 kroner. Gjennomsnittlig gevinst ville være lik null.

Hvis fotballtilhengeren ikke finner et slikt veddemål rettferdig (eller *fordelaktig*) er sannsynligheten anslått for høyt med 0.8

5: Aldri i ledelsen – Bernoullisk sannsynlighet eller frekventistisk?

Nå er det bare det siste spørsmålet som gjenstår. Sannsynligheten p for at hjemmelaget aldri har ledet i en kampsom har endt 5 – 5 er lik en sjettedel!

Og hvordan kan vi nå si det så sikkert? Vel, ved å telle opp antall mulige utviklinger (m) av kampen, fra 0 – 0 og til 5 – 5, finner vi at $m = 252$. Hjemmelaget har aldri vært i ledelsen i $g = 42$ av disse. Bruker vi så Bernoullis definisjon av sannsynlighet, som sier at:

$$\text{sannsynlighet} = \frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}},$$

blir sannsynligheten lik $^{42}/_{252}$ eller $^{1}/_{6}$.

Denne definisjonen bygger på antagelsen om at de mulige enkeltutfallene er like sannsynlige[38].

Om dette resonnementet er korrekt kan – til en viss grad – kontrolleres.

Ved å samle inn opplysninger om alle kamper som har endt 5 – 5, kan man finne et estimat $\hat{p}$ på den sannsynligheten p det spørres etter.

Videre kan man teste en hypotese H_0: $p = {}^{1}/_{6}$ mot alternativet H_1: $p \neq {}^{1}/_{6}$.

Hvis H_0 blir forkastet er antagelsen om at enkeltutfallene er like sannsynlige ikke troverdig. I den frekventistiske verden ville nå $p = \hat{p}$.

[37] *Hvis laget hans taper eller spiller uavgjort.*

[38] *Problemet er beslektet med det såkalte "valgproblemet" (The Ballot Problem), hvor man spør etter sannsynligheten for at den vinnende part alltid har vært i ledelse under opptelling av stemmene ved et valg hvor de to motstanderne fikk henholdsvis m og n stemmer, m > n. Svaret er (m – n)/(m + n). Se Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol 1, 3rd ed. Wiley & Sons.*

Vi vender tilbake til det tidligere omtalte problemet med å stoppe i rett tid. Med det som utgangspunkt skal vi antyde hvordan både matematisk forventning og risiko vil bli definert.

Forventning (Stopp i tide, enda en gang)
Du får delta i det spillet hvor en terning skal kastes – kanskje flere ganger – enten til man velger å stoppe frivillig eller til man får en ener. I det første tilfellet får du/deltageren utbetalt det akkumulerte antall øyne i kroner, i det andre tilfellet får du ikke noe. La oss også tenke oss at du får delta kun en gang i dette spillet men også at det finnes mange andre som også får delta en gang.

Du har kastet terningen fire ganger, uten å få noen ener, og har samlet 15 poeng. Skal du si stopp?[39]. Du risikerer å tape de 15 poengene, men du har også muligheten for å øke poeng-summen med hele 40 %, hvis neste kast gir en 6-er.

For å svare på det spørsmålet vil det være nødvendig å vite hva det er du som deltager forsøker å oppnå. Hvilket *beslutningsprinsipp* ligger til grunn? La oss anta at det er størst mulig gevinst, selv om det ikke er helt presist hva som menes med det.

Men sett at du i stedet har oppnådd 25 poeng (men på flere enn fire kast, selvfølgelig), da er det *mindre* opplagt at du skal fortsette.

Sannsynligheten for å tape er en sjettedel, uansett om en har 15 eller 25 poeng. Men med 25 poeng så settes mer på spill enn om jeg har 15 poeng. *Risikoen* er større.

Vi er tilbake til ideen om at risiko involverer både sannsynlighet og konsekvens.

La oss tenke oss 6 spillere som alle sammen har 15 poeng. En samlet vurdering sier oss at om alle stopper så har de til sammen $6 \cdot 15 = 90$ kroner, det er helt sikkert. Hvis de derimot velger å kaste en gang til vil ideelt sett *en* spiller få en ener, og dermed tape sine 15 kroner, mens *en* spiller får en toer og har så 17 poeng, *en* får en treer og har dermed 18 poeng, *en* får en firer og 19 poeng, *en* får en femmer og 20 poeng og *en* spiller får en sekser og ender på 21 poeng.

Etter at alle seks har kastet en gang ville gruppen ha:

$0 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 = 95$ kroner.

Dette er 5 kroner mer enn de ville hatt om de hadde stoppet.

Deles de 5 kronene på de 6 personene blir *forventet gevinst* for hver av dem lik $5/6 = 0.83$ kr. Det lønte seg å fortsette. Nå kan vi presisere beslutningsprinsippet som ble noe løselig formulert ovenfor – det såkalte *Bayes prinsipp:* Velg den strategi som gir størst forventet gevinst.

Gjør vi de samme betraktningene med 25 kroner som utgangspunkt, finner vi at forventet gevinst ved å fortsette er negativ, lik −0.83 kroner. Det virker som om optimal stoppverdi er en plass mellom 15 og 25 kroner, kanskje midt i mellom? Løsningen er faktisk så enkel som antydet.

Optimal strategi for når man skal stoppe er som følger:

Hvis vi, ved å fortsette, risikerer å sitte igjen med mindre enn det vi har, *så fortsetter vi ikke.*

Dette gjelder uavhengig av hva innsatsbeløpet er. (Hvis innsatsen er *for* høy lønner det seg ikke å delta i det hele tatt.)

La oss vise hvilket beløp det lønner seg å stoppe på.

Seks spillere har x kroner hver og står overfor valget mellom å forsette eller å stoppe. Om vi regner som tidligere, er forventet beholdning per person hvis alle fortsetter:

$$0 \cdot \tfrac{1}{6} + (x+2) \cdot \tfrac{1}{6} + (x+3) \cdot \tfrac{1}{6} + (x+4) \cdot \tfrac{1}{6} + (x+5) \cdot \tfrac{1}{6} + (x+6) \cdot \tfrac{1}{6} = \frac{5x+20}{6}$$

Hvis dette beløper er større enn x vil det lønne seg å fortsette, hvis det er mindre enn x vil det lønne seg å stoppe.

Fortsett dersom:

$$\frac{5x+20}{6} > x \Rightarrow 5x + 20 > 6x \Rightarrow -x > -20 \Rightarrow x < 20$$

Altså, vi bør fortsette så lenge vi har under 20 kroner. For $x = 20$ er det likegyldig hva vi gjør.[40]

Den *matematiske risikoen ved tap*, for en som har x poeng, er:

tapt beløp · sannsynlighet for tap $= x \cdot 1/6$

[39] *Det ville kanskje være greit å vite hvor stor innsatsen er? Men vær nå oppmerksom på at terningens oppførsel ikke blir påvirket av innsatsbeløpet og da er det på sin plass å spørre om din oppførsel – når du først har valgt å delta – skal la seg påvirke av innsatsen. Det er faktisk slik at optimal stoppverdi er uavhengig av innsatsbeløpet!*

[40] *Den gjennomsnittlige gevinst med: «Stopp når beløpet passerer 20» er 8.13. Så en innsats på 10 kr. per spill vil gjøre spillet ufordelaktig for spilleren, i det lange løp.*

Men han risikerer[41] også å vinne, og få utbetalt 2, 3, 4, 5 eller 6 kroner, og sannsynligheten er lik $\frac{1}{6}$ for hver mulighet. Vel, i stedet for å si: *"Han risikerer å vinne"*, så sier vi at:

Forventet gevinst ved å kaste en gang til er:

$$2 \cdot \tfrac{1}{6} + 3 \cdot \tfrac{1}{6} + 4 \cdot \tfrac{1}{6} + 5 \cdot \tfrac{1}{6} + 6 \cdot \tfrac{1}{6} = \tfrac{20}{6} = 3.33 \text{ kroner.}$$

Det optimale er å stoppe når forventet utbetaling er lik risikoen ved tap, dvs. når:

$$\frac{20}{6} = x \cdot \frac{1}{6} => x = 20$$

Definisjonen av risiko, som en forventningsverdi, er i tråd med den som er gitt av ISO.[42]

Bayes risiko er ikke den eneste matematiske definisjonen av risiko som er i bruk. For ordens skyld tas ytterligere tre definisjoner med.[43]

<u>risiko</u>, i epidemiologi vanligvis benyttet om sannsynlighet for at en hendelse vil inntreffe, f.eks. sannsynlighet for at en person vil få en viss sykdom eller komme til å dø i løpet av et gitt tidsrom.

<u>absolutt</u> risiko, sannsynligheten for en begivenhet, en tilstand, sykdom eller risikofaktor i en befolkning. Absolutt risiko angis som antall tilfeller delt på antall personer i befolkningen som undersøkes.

<u>relativ risiko</u>, forholdet mellom sannsynlighet for sykdom eller død hos personer som har vært eksponert for et mulig sykdomsfremkallende fenomen, og tilsvarende sannsynlighet hos dem som ikke har vært eksponert for fenomenet.

I forbindelse med risikovurderinger omkring offshore-installasjoner opererer man med en hel rekke risikobegrep – og en jungel av forkortelser; **P**latform **F**atality **R**isk (PFR), **A**verage **I**ndividual **R**isk, **G**roup **R**isk og **A**sset **R**isk, bare for å ha nevnt noen.[44] De fleste av disse er definert som Bayes risiko, som ofte kan kalkuleres som absolutt risiko.

FREKVENTISME OG BAYESIANISME

Er vi nå kommet noe nærmere svaret på spørsmålet: *Hva er sannsynlighet?* Vi har i alle fall avklart litt omkring hva det *ikke* er. Sannsynlighetsregningen kan – som all annen matematikk – gjennomføres som en rent intellektuell aktivitet, uten tanke for at den skal brukes til noe. Men hvis den skal ha praktisk verdi – i tillegg til den estetiske verdi – så må vi kunne oversette de matematiske teoremene[45] til den virkelige verden og dens reelle problemstillinger.

I den forbindelse må vi si noe mer enn det som er sagt så langt, om hva som menes med *sannsynlighet*. Vi skal ikke *forsøke* å bli enige om hva som er korrekt oppfatning av sannsynlighet, men bare kort gjøre rede for noen av de fortolkningene som er i omløp.
Hovedretningene kalles *frekventistisk* oppfatning og *bayesiansk*[46] oppfatning. Og nå står vi foran den tidligere omtalte «uoverstigelige» kløften mellom visse fagmiljøer. Den matematiske siden er grei nok men den praktiske fortolkningen av sannsynlighet *er* kontroversiell.

<u>Frekventisme</u>
Frekvensfortolkningen knytter sannsynligheter til eksperimenter (i vid forstand) som kan gjentas et ubegrenset antall ganger under identiske forhold. Sannsynligheter er objektive størrelser som alle kan få tilgang til, med hvilken som helst ønsket grad av nøyaktighet, ved bare å gjennomføre et tilstrekkelig stort antall eksperimenter.

En frekventist ville ikke befatte seg med spørsmålet om sannsynligheten for at Roma ligger lenger sør enn Beijing – ikke på annen måte enn å si at den er lik 0 eller lik 1. Når det gjelder terningen som er kastet, men hvor

---

41 *Det er nok en litt rar bruk av ordet «risikere», når det er snakk om å vinne. Forsøk å bære over med det, språkbruken blir straks korrigert.*

42 *"A term which combines the chance that a specified hazardous event will occur and the severity of the consequences of the event" (Fra ISO(1999). Control and Mitigation of Fires and Explosions on Offshore Production Installations – Requirements and Guidelines. International Standards Organisation, ISO 13702: 1999(E).)*

43 *Hentet fra nettutgaven av Store Norske Leksikon: http://www.snl.no/*

44 *Se Vinnem, J. E. Offshore Risk Assessment. Principles, Modelling and Applications of QRA Studies. Kluwer Academic Publishers. 1999.*

45 *Et matematisk teorem er et resultat eller en læresetning som er utledet fra aksiomene som vi bygger på, og andre teoremer utledet av disse. Et slikt teorem er De Store Talls Sterke Lov, som i en enkel form sier at: "Anta aN er antall ganger en begivenhet A inntreffer i en serie med N uavhengige enkeltforsøk, med suksessannsynlighet p = P(A).*

46 *Etter presten Thomas Bayes [1702 - 1761]*

resultatet ikke er avslørt, vil en frekventist gi en sjettedels sannsynlighet til at den viser en sekser – i og med at han ikke blir fortalt at den er falsk. Hvis det blir opplyst om at den grønne terningen er falsk representerer den ingen forskjell fra en rettferdig terning, bortsett fra at *p* ikke antas å være en sjettedel – og *p* kan og må bestemmes gjennom eksperimenter.[47]

En rendyrket frekventist vil heller ikke befatte seg med sannsynligheter for de mulige utfall av en fotballkamp. Likevel bør han kunne godta at en annen person ville oppgi at oddsen for hjemmeseier er 1:4.

Bayesianisme

Bayesianerne er en langt mer sammensatt gruppe enn frekventistene. Det vil være umulig å gi en fyllestgjørende utredning av alle retninger innen bayesianismen på noen få linjer. Felles for de fleste som regner seg for bayesianere er at *alt kan tilordnes sannsynligheter.*

De *subjektive bayesianere* mener at hver og en kan operere med sine egne høyst subjektive eller personlige sannsynligheter. Hvis en bayesianer sier at sannsynligheten for at Beijing ligger lenger syd enn Roma er lik 0.8, uttrykker det hvilken grad av tillit denne personen har til at så er tilfellet. Denne tilliten kunne vært gjenspeilt i et veddemål, som tidligere beskrevet i eksemplet Liverpool versus Manchester United.[48]

Empiriske bayesienere vil gjerne bygge sine sannsynligheter på tidligere observasjoner. Observasjoner som kan ha mer eller mindre til felles med den begivenheten det nå er snakk om å tallfastsette en sannsynlighet for. Tidligere års resultater i oppgjørene mellom Liverpool og Manchester United vil være relevante når det gjelder å fastsette sannsynlighetene for kamputfallene i det neste oppgjøret. Dette til tross for at sannsynligvis ingen av dagens spillere var involvert i kampene for 10 år siden.

Når oddsen blir jobb

Et klipp fra Bergens Tidende[49] viser hvordan enkelte arbeider med subjektive sannsynligheter til daglig.

> *Arild Østbø er utdannet lærer (men) i dag er Arild bookmaker. . . . Han jobber som oddssetter i Playit, et engelsk-basert firma som har kunder i over 100 land. . . . Arild snakker mye om sannsynlighet og det han kaller gode spilleobjekter. Et godt spill for Arild er ikke nødvendigvis å tippe på et utfall som du har mest tro på. – Det er akkurat på det området du kan skille mellom en dyktig og en middels god oddsspiller. – Det viktigste er at du gjør deg opp en mening om hva som er sannsynlig. Hvis du for eksempel mener det er 30% sannsynlighet for at Tim Henman slår Pete Sampras i tennis, men en bookmaker indikerer at det er 10% sannsynlighet for det samme resultatet, snakker vi om et interessant spilleobjekt, forteller Østbø. . . . Den økende interessen for odds har ført til at det har dukket opp mange bookmakerselskaper som opererer på internett. Ved å opprette kontoer hos flere av aktørene kan du selv velge den bookmakeren som tilbyr høyest odds, samt benytte deg av "sure win". "Sure win" eller arbitrasjespill vil si at du spiller på alle utfallene på et objekt, og likevel går i overskudd. Det finnes nettsider som viser alle spill som gir en slik gevinst.*
>
> *Poenget må være at ethvert spill skal være nøye gjennomtenkt, og ikke minst, det må være en større sannsynlighet i henhold til dine betraktninger enn hva som er tilfellet for bookmakerens preferanser. ... Hvis jeg skulle nevne en vinnerformel, så måtte den være å samle inn mer informasjon enn hva bookmakeren gjør. Da slår du sannsynligvis bookmakeren, i alle fall over tid, avslutter Østbø.*

A priori informasjon/sannsynligheter

En bayesianer som blir spurt om seksersannsynligheten til en bestemt terning ville si at den er *p*, ett eller annet tilfeldig tall mellom 0 og 1. Og med "tilfeldig" så mener han virkelig *tilfeldig*.

Ut fra tidligere erfaringer med *lignende terninger* vil han kunne angi sannsynligheter for at *p* skal ligge mellom to vilkårlige verdier *a* og *b*. Han kan for eksempel si at sannsynligheten for at *p* er mellom 0.10 og 0.25 er nittifem prosent. Slike sannsynligheter kalles *a priori sannsynligheter*.[50]

Hvis han ikke har noen som helst tidligere erfaringer å bygge på ville han ty til noe som kalles *ikke-informative* a priori sannsynligheter.

---

[47] *Men som tidligere nevnt kan vi bare bestemme p innenfor et intervall med en viss konfidensgrad. Jo høyere konfidensgrad jo videre blir intervallet, med mindre en kan øke antall eksperimenter ubegrenset.*

[48] *"Sannsynlighet eksisterer ikke", er et slagord av Bruno de Finetti, lansert i forordet til boken: Theory of Probability. vol 1. Wiley 1970. De Finetti var en av bayesianismens aller fremste personligheter i det forrige århundret.*

[49] *Journalist Stian Frugård Steinsvik, Bergens Tidende – søndag 16. august 2002.*

[50] *a prio`ri adv (lat. 'fra det som er forut'). 1: i skolastikken: vite noe a- vite noe ut fra årsaker (og ikke ut fra virkninger). 2: hos I. Kant o a: viten a- viten som er uavhengig av erfaring, til forskjell fra viten a posteriori. Fra Bokmålsordboka.*

Frekventisten ville overhodet *ikke* akseptere at sekser-sannsynligheten *p* skal oppfattes tilfeldig og dermed har han ingen enkel måte for å trekke inn eventuell a priori informasjon som måtte være tilgjengelig.[51]

Vender vi tilbake til skipssjefen som skulle vurdere sannsynligheten for at et bestemt sund er minelagt, så er det en typisk situasjon som frekventisten vanskelig kan befatte seg med. Men bayesiansk metodikk tilbyr faktisk ikke-informative á priori sannsynligheter for slike problemstillinger.[52]

Løgn og tilfeldighet

En annen og høyst aktuell problemstilling, hvor bayesiansk og frekventistisk sannsynlighetsoppfatning vil stå steilt mot hverandre er i forbindelse med bruk av løgndetektorer, som omtalt i utklippet på neste side.[53]

På grunnlag av tester gjort med løgndetektor vil professor Svebak komme fram til sann-synligheter for en persons skyld og uskyld i en gitt sak. Dette vil en frekventist ha store – for ikke å si uoverstigelige – barrierer mot å godta, men en bayesianer bifaller gjerne.

I 2002 gjennomførte en ekspertgruppe en analyse av påliteligheten til løgndetektorer, på oppdrag av U.S. Department of Energy. Hensikten var å undersøke om slike tester kan brukes i forbindelse med sikkerhetsvurderinger av personell i viktige stillinger.

I konklusjonen sies følgende:

> *"While they can differentiate between the lying and truth telling at a rate above chance, they are far from perfect."*

og

> *"Second, the large number of people being tested may include only a few guilty of target offences, and tests sensitive enough to identify them will also falsely accuse many innocent individuals."* [54]

Selv om disse utsagnene ikke gir noen ubetinget tillit til løgndetektortestene, ligger det likevel ikke noen kritikk av bayesianske metoder bak dem.

Vi kan vise hva som ligger bak sitatet ovenfor med et enkelt eksempel:

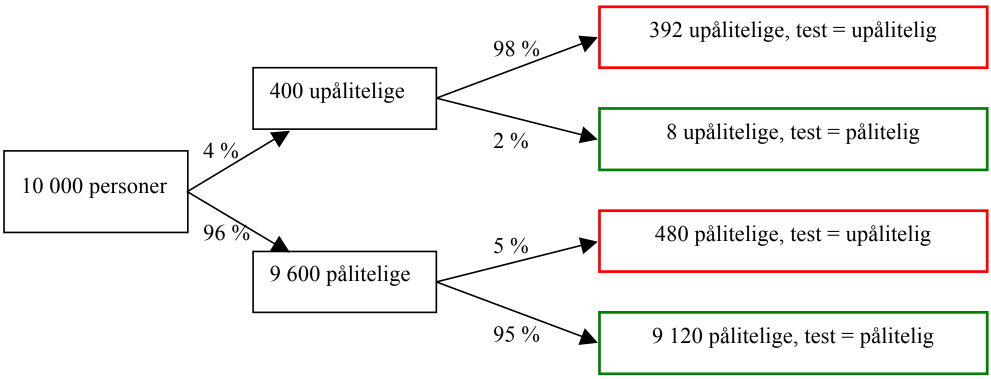
En upålitelig pålitelighetstest

I en gruppe på 10 000 mennesker er 4 % upålitelige mens de resterende 96 % er pålitelige. Dette er kjent, men hvem som er upålitelige det vet man ikke, derfor må alle gå gjennom en pålitelighetstest. Denne testen er slik at den klarer å avslører 98 % av de upålitelige, mens 2 % slipper gjennom. Testen vil også klassifisere 5 % av de pålitelige som upålitelige men de resterende 95 % blir korrekt bestemt.

Resultatene av testen er illustrert i figuren nedenfor.

Blant de 9128 personene som testen klassifiserer som pålitelige er det kun 8 (dvs. 0.88 %) som er upålitelige. Vurdert ut i fra *det* tallet er testen meget god.

Men det er også 872 personer som blir stemplet som upålitelige og blant disse er det 480 (dvs. hele 55 %) som blir urettmessig klassifisert som upålitelige.



[51] *"Empiriske likelihood metoder" gir visse muligheter, se f.eks. Art B. Owen: Empirical Likelihood. Chapman & Hall/CRC. 2001.*

[52] *A.Washburn: Mine Warfare Models. Navel Postgraduate School. 2002.*

[53] *Aftenpostens nettutgave, torsdag 6. september 2001.*

[54] *Kilde: J. Gingras: Lie Detectors Too Flawed For Security Screening. Amstat News. December 2002, #306.*

Trosser enstemmig kjennelse i Høyesterett

Oslo byrett godtar løgndetektor

For første gang siden Høyesterett fastslo at løgndetektortester ikke kan brukes i straffesaker, er en slik test fremlagt i en norsk rettssal.

MAY BRITT BRØYN

Stikk i strid med hva landets øverste domstol har kommet frem til, har Oslo byrett nå tillatt at resultatene av en løgndetektortest fremlegges som bevis i en straffesak. Det skjedde i en barnebortføringssak som er oppe til behandling denne uken. En modig og redelig avgjørelse av dommeren. Dette kom fullstendig overraskende, sier professor Sven Svebak ved Institutt for samfunnsmedisin (NTNU) i Trondheim. Han er Norges eneste ekspert på løgndetektortester (polygraftester), og har lenge forfektet at testen er pålitelig og bidrar til å hindre justismord.

Men høsten 1996 fastslo Høyesterett enstemmig å nekte løgndetektortester fremlagt som bevis i en straffesak. Begrunnelsen for kjennelsen var blant annet nettopp at det kunne legge press på både siktede og vitner om å la seg teste. Da Pourin Mohammad fikk sin sak gjenopptatt, og ble frikjent for Minde-drapet i 1997, var riktignok en løgndetektortest som konkluderte med hans uskyld ett av elementene i gjenopptagelsesbegjæringen til Høyesterett. Svebak testet også fetteren til Birgitte Tengs, og fikk fremlegge en sannsynlighetsvurdering av at han ikke har psykopatiske trekk, da saken ble behandlet i lagmannsretten. Men selve løgndetektortesten fikk han ikke komme inn på da han vitnet i rettssaken.

Etter Høyesteretts kjennelse har spørsmålet om slike tester nærmest vært et tabu i norske rettssaler. Testene er ikke tillatt ført som bevis en eneste gang, og det er ofte blitt oppfattet som en provokasjon bare jeg snakker om dem, sier Svebak. Tirsdag tillot imidlertid byrettsdommer Kåre Røkkum overraskende Svebak å fremlegge testen i en straffesak som er oppe i Oslo byrett. Her står en 42 år gammel barnefar tiltalt for å ha holdt sine to barn borte fra moren i to uker, etter et pappasamvær i 1999. Bak handlingen ligger en langvarig strid om foreldreansvar og samværsrett. Etter dommer i både byrett og lagmannsrett har faren fått svært begrenset samvær med sine to sønner – den siste tiden bare under spesielt tilsyn. Men han har hele tiden hevdet at hans tidligere kone har utøvet vold mot barna.

I 1997 tok han kontakt med Svebak og fikk utført løgndetektortesten for å bevise dette. Straffesaken mot ham har vært utsatt en rekke ganger det siste året. Sist vinter gjennomførte Svebak en vanlig personlighetsanalyse av 42-åringen, og stilte nå som sakkyndig vitne for å presentere resultatet av analysen. -Jeg anså det som utelukket å få fremlegge løgndetektortesten, og hadde ikke engang tatt med papirene i retten. Men da tiltalte selv begjærte å få den fremlagt som bevis, kom det ingen innsigelser – hverken fra dommer eller aktor. De virket tvert i mot interessert i å lytte til hva testen sier. Dette var helt nye toner i en norsk rettssal. Dommeren skal ha all berømmelse for å være så åpen. Og en løgndetektortest kan jo aldri frata domstolen dens suverene rett til å vurdere bevis i saken, sier Svebak.

Skal man tro på løgndetektortesten, snakker den tiltalte 42-åringen sant når han hevder at barna har fortalt om voldsepisoder der mor har vært innblandet.

Hindre justismord

Svebak legger ikke skjul på at løgndetektortestene er best egnet til å hindre justismord, når uskyldig tiltalte ikke blir trodd av domstolen. Nettopp derfor er det tiltalte og forsvarere som først og fremst har hatt interesse av å bruke løgndetektortestene som bevismiddel i retten – mens politi og påtalemyndighet har motsatt seg dette. Politiadvokat Øyvind Strand, som er aktor i straffesaken mot 42-åringen, sier det var spesielle forhold ved saken som gjorde at han ikke fant grunn til å protestere mot at testen ble fremlagt.

Løgndetektortesten gikk heller ikke inn på skyldspørsmålet for den handling han står tiltalt for – men berører om tiltalte er troverdig når han hevder at mor har slått barna, og om han dermed var i en nødrettssituasjon da han bortførte dem, sier Strand. Byrettsdommer Kåre Røkkum legger ikke skjul på at han syntes det var interessant å høre teoriene bak løgndetektortesten og dens konklusjoner. Testen er ett av flere bevismomenter som retten må vurdere. Den vil dermed også bli omtalt i dommen, sier Røkkum.

Subjektive sannsynligheter

At subjektive metoder tas seriøst, i f.eks. matematisk modellering av militære operasjoner, er følgende sitat en indikasjon på:

"In recent years the advancements in defence planning have created many challenging problems (deterministic and stochastic) for the scientist in the operations research area. Some of these challenges deal with the mechanism of incorporating field commanders subjective information and engineers prior assessment (weapons reliability) in the decision process." [55]

Men når et vitne i "Linda-saken" sier[56] at han *"er 99 % sikker på at det var den drapstiltalte samboeren han så."*, er det naturlig å spørre hvordan han har kommet fram til *denne* sannsynligheten.

Det *er* faktisk utviklet metoder for å fastsette subjektive sannsynligheter.[57] Men det hadde vært overraskende om slike metoder ligger bak den refererte sannsynligheten.

Lov og tilfeldighet

I en artikkel i Lov og Rett[58] blir juristers sannsynlighetsbegrep diskutert og forfatteren tar opp en *mengde* interessante problemstillinger på knappe to sider. Vi yter forfatteren stor urett når vi nøyer oss med å se nærmere på kun ett avsnitt i denne sammenheng:

"Det er ikke slik at sannsynlighet lar seg måle og angi i prosent unntatt i helt spesielle tilfeller som nesten aldri forkommer i rettslivet. Det begrep sannsynlighet vi jurister opererer med er noe annet enn det eksakte matematiske begrep i sannsynlighetsregningen. Denne har som forutsetning statistikk over store mengder av like begivenheter, noe som nesten aldri forekommer i rettslivet."

Forfatteren gir her uttrykk for at sannsynlighetsregningen befatter seg utelukkende med frek-ventistiske metoder, hvilket er feil.

Et siste eksempel i dette avsnittet viser at vidt forskjellige sannsynlighetsoppfatninger kan brukes innen *en* kontekst. Det dreier seg om navigasjon.

Effektivitetsligningen

Når det er snakk om å vurdere navigasjonsutstyr om bord i båter brukes den såkalte effektivitetsligningen[59]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{P}$$

Her er **E** *effektiviteten* og de fire størrelsene på høyre side er sannsynligheter, men de er av vidt forskjellig karakter.

F: Sannsynligheten for at utstyret er installert, som oftest lik 1, men hvis flere skip (*n* stykker) deler det samme utstyret lik $\frac{1}{n}$.

A: Sannsynligheten for at systemet er tilgjengelig, målt ved *andelen av tiden* det er tilgjengelig.

U: Sannsynligheten for at utstyret blir brukt, og brukt korrekt. Størrelsen anslås som regel subjektivt.

P: Sannsynligheten for at en oppnår den nøyaktighet som kreves. Den bestemmes ut i fra teoretiske beregninger eller simuleringer. (Størrelsen avhenger av hva slags utstyr det er snakk om; Decca, Loran eller GPS og hva slags farvann en opererer i.)

F er en sannsynlighet som er utregnet med bakgrunn i "like sannsynlige utfall". **A** er en *slags* gjennomsnittlig relativ frekvens, men passer strengt tatt ikke inn i noen av de sannsynlighetsbegrepene som vi har diskutert. **U** er som sagt et resultat av subjektive vurderinger, mens **P** kan være det som kalles et *estimat*, hvis den er basert på simuleringer.

Sannsynlighetsregningen er uavhengig av hvordan man oppfatter sannsynlighet. Det er først i metodevalget i forbindelse med anvendelser at uenighet oppstår. Og det er spesielt innen inferensteorien (dvs. den matematisk statistikk) og i beslutningsanalysen at konflikten mellom bayesianere og frekventister er mest åpenbar.

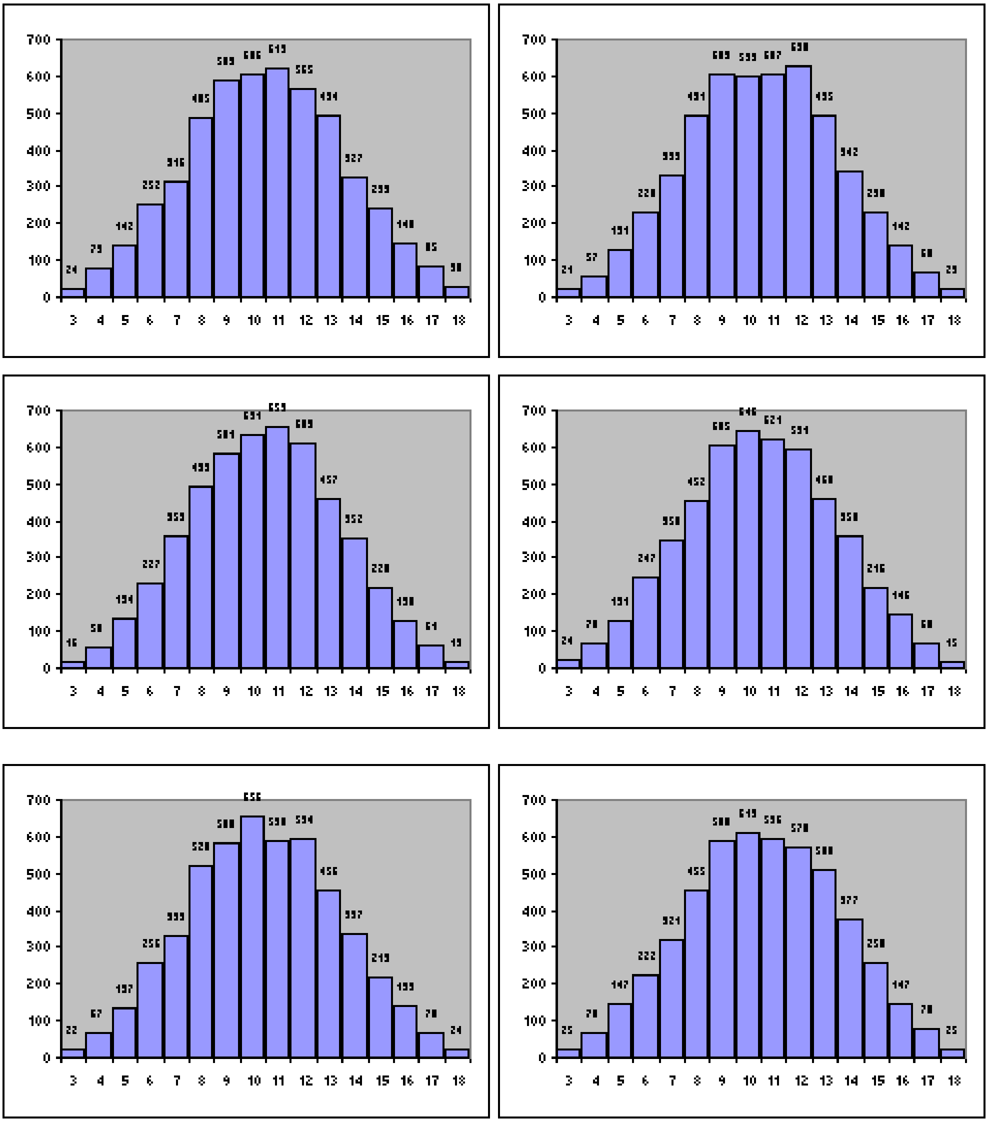
[55] *A.S.R. Salim & W.M. Hamid: A Bayesian Stochastic Formulation of Lanchester Combat Theory. Military Operations Research, vol. 6 (2001), no. 3.*

[56] *Aftenpostens nettutgave: 11. februar 2003*

[57] *Se M.H. DeGroot: Optimal StatisticalDecisions. McGraw – Hill. 1970.*

[58] *Eftestøl, Eivind.: Om sannsynlighet, straff og erstatning. Lov og Rett, 1999, s. 129 – 130.*

[59] *Tony Fletcher: Applications of a Methodology to Demonstrate the Relative Effectiveness of Different Navigation Aids. The Journal of Navigation, vol. 44, no 3 (1991)*



Hvert histogram viser antall ganger x = 3,4, . . . ,18 øyne er blitt vist opp når tre terninger er kastet 5000 ganger.

STOKASTISK LOVMESSIGHET

En av de viktigste fagbøker utgitt i Norge i det forrige århundret er Erling Sverdrups bok: *Lov og Tilfeldighet* [60]. Boken har vært viktig for flere generasjoner med statistikere, aktuarer og økonomer, og også for biologer. Tittelen kan tyde på at det er en bok for jurister, men det er det altså ikke. Den henspeiler på de lovmessigheter som tilfeldigheter er underlagt. *De Store Talls Lov* er ett eksempel på stokastisk lovmessighet.

Sum av tre terninger

Et annet eksempel er illustrert med histogrammene på forrige side. Disse viser seks tilfeller av 5000 (simulerte) kast med tre terninger, hvor summen av antall øyne på de tre terningene er registrert for hvert kast. I det første tilfellet er summen lik 3 i 24 av de 5000 kastene, det vil si den relative frekvensen er 0.0048. Sannsynligheten for å oppnå sum lik 3 i ett kast er $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0.0046$ og den relative frekvensen er jo svært nær dette tallet. Dette er altså et eksempel på de store talls lov i praksis.

Ellers legger vi merke til hvor like de seks histogrammene er å se på, selv om en nærmere undersøkelse vil avdekke ganske store forskjeller. Den største frekvensen for 10 øyne er 656 mens den minste frekvensen er 599, en forskjell på 57.

Hvis vi hadde gjennomført 50 000 simuleringer for hvert histogram ville forskjellen høyst sannsynlig blitt større, men de seks histogrammene ville temmelig sikkert lignet enda mer på hverandre.[62]

Det bakenforliggende, *teoretiske histogrammet*, som gir sannsynlighetene for 3, 4, . . . , 18 øyne kalles vanligvis for *sannsynlighetsfordelingen*.

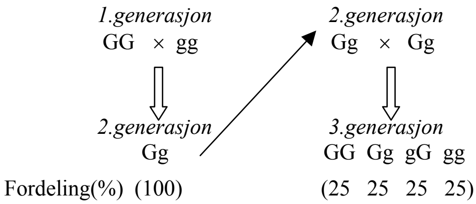
De mendelske arvelover

er eksempler på et lignende forhold. Ved å krysse erteplanter oppdaget Mendel[63] underliggende sannsynlighetsfordelinger for hvordan bestemte egenskaper hos foreldrene kom igjen i avkommet. Dette gjorde han i stand til å formulere arvelovene. Vi skal se litt nærmere på et av Mendels forsøk, uten å utføre et genetisk dypdykk.

Han krysset grønne erteblomster (Pisum sativum) med gule erteblomster og observerte at alle "første-generasjons-plantene" fikk gule blomster. Når så disse ble krysset med hverandre fikk han 6022 gule planter og 2001 grønne planter, et forhold som er svært nær 3:1.

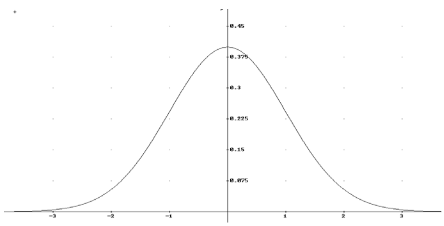
Dette blir forklart på følgende måte; hver plante har to kjennetegn som er med på å bestemme fargen og avkommet får *ett* kjennetegn fra hver av foreldrene. En ren gul plante har kjennetegnene GG mens en ren grønn har kjennetegnene gg. Når en ren gul plante krysses med en ren grønn får avkommet kjennetegnet Gg (en hybrid), som opptrer med gul farge. En sier at gul er dominant over grønn.

Når så disse hybridene krysses vil vi i 2.generasjon få fire muligheter: GG, Gg, gG , gg, som hver er like sannsynlige. De tre første gir gul farge og den fjerde gir grønn farge. Dermed får vi det teoretiske forholdet 3:1.



Gausskurven

Vender vi tilbake til de tre terningene og de seks histogrammene, så ligner de altså på hverandre. Men de ligner også litt på den såkalte gausskurven, som er vist under.



[60] *Bind I og bind II, Universitetsforlaget – 1965.*

[61] *Simuleringene er gjort Excel, som har innebygget en tilfeldig generator, det vil si en algoritme som kan generere tall som oppfører seg som terningkast. De fleste moderne lommeregnere er også i stand til dette. Se ellers Sérgio B. Volchan: What Is a Random Sequence? The American Mathematical Monthly, vol, 109, January 2002.*

[62] *Uttrykkene "høyst sannsynlig" og "temmelig sikkert" kan kvantifiseres med sannsynligheter nær en. Vi må rett nok presisere hva som menes med å "ligne på hverandre" betyr.*

[63] *Mendel, Gregor Johann (1822-1884) gjennomførte (1854 -1868) eksperimentene som førte til at han oppdaget arvelighetslovene, men arbeidet ble først anerkjent 16 år etter hans død. Kilde: gyldendal.no/jakten/ordliste/mendel-gregor.htm*

Karakterene skal fordeles på forhånd

Uansett hva de presterer, skal ti prosent av studentene ved landets universiteter og høyskoler få beste og laveste karakterer. Studentene reagerer sterkt på det nye karaktersystemet. Camilla Høyem. Aftenpostens nettutgave. 23. okt.2003.

En Gauss-kurve, eller en "normalfordelingskurve", blir blant studentene kalt for sensorenes lille form for pilkast-metode når karakterer skal fastsettes. Hvor mange som skal få de ulike karakterene, er forhåndsbestemt: 10% av studentene skal få beste (A) eller dårligste ståkarakter (E), 25 prosent får B og D, mens 30 prosent av dem ender med middelkarakteren C. Nå skal dette innføres på alle universiteter og høyskoler.

- Dette er urettferdig. Uansett hvor mye man jobber, risikerer man å få en dårligere karakter enn man fortjener, sier Lisa Jeppesen (22). Hun er mellomfornøyd med de nye bokstavkarakterene, og synes overgangen er problematisk. Det er vanskelig å vite hva man kan vente seg når vi ikke helt vet hvor en A eller en C ligger.

Litteraturstudent på tredje året, Daniel Busk (23), mener Gauss-kurven kan slå begge veier. Dersom du er i en klasse med mange tullinger, kan karakterkurven være en fordel. Du vil da få bedre karakter enn ellers, sier han.

Gauss-kurven

En matematisk modell funnet av den tyske matematikeren Carl Friedrich Gauss i 1809. Kalles også normalfordelingskurve. Når et statistisk materiale illustreres ved et histogram, får man i mange tilfeller en figur som er noenlunde symmetrisk og har en klokkeform. Gauss (1777-1855) var direktør for observatoriet i Göttingen. Stor matematiker. Utførte grunnleggende arbeider i tallteori, differensialregning, beregning av himmellegemenes bevegelser, flateteori, algebra, jordmagnetisme og geodesi. Han kjente de elliptiske funksjoner før Abel, men offentliggjorde dem ikke. Abel regnes derfor som grunnleggeren av teorien om disse funksjonene.

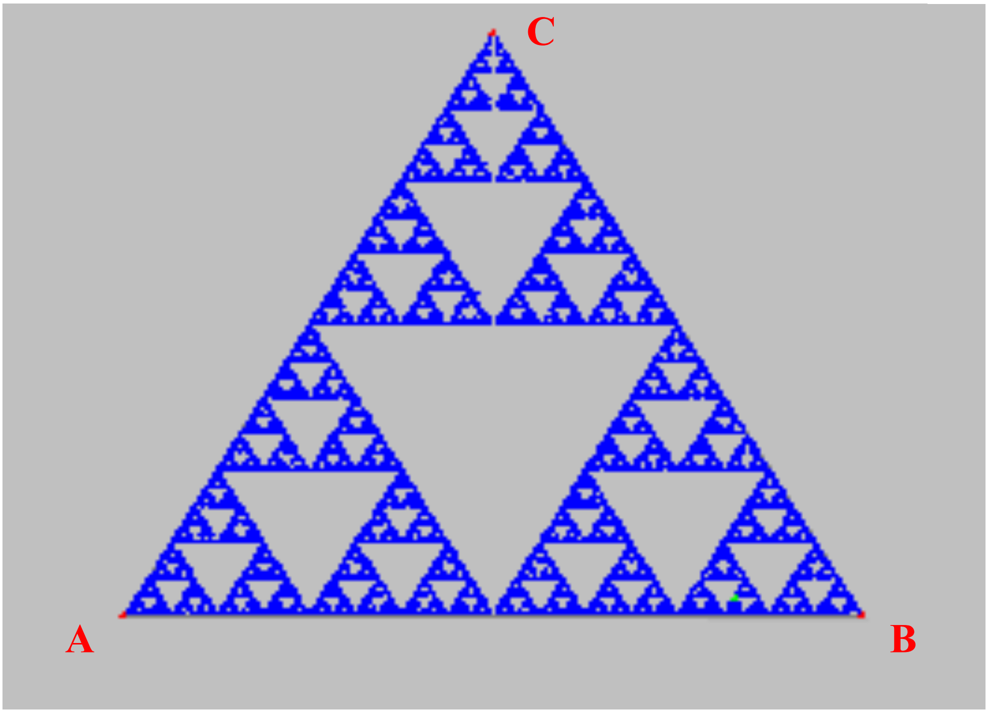
Gauss konstruerte også instrumenter som gjorde det mulig å måle jordmagnetismen.

Hans hovedverk er Disquisitiones artimeticae (1801).

Busk og kameraten Ørjan Ommundsen (23) mener det nye systemet gjør at man ikke gidder å jobbe like hardt for å få de beste karakterene. - Det er jo mange færre karakterer. Nå må man ikke lenger jobbe hardt for å krype opp et par kommatall, sier studentene.

Kvalitetsreformen

Administrasjonsleder ved Universitetet i Oslo, Kirsti Harg, bekrefter at det skal innføres en normalfordeling av karakterene. Dette er en del av kvalitetsreformen. Departementet har pålagt universitetene å bruke karaktersystemer som lett kan leses av utenlandske læresteder. Systemet er ifølge Harg som før, men mindre grovmasket. Og realiteten passer inn i Gauss-kurven: Noen studenter er gode, noen dårlige og de fleste et sted på midten. I disse dager pågår det nasjonale fakultetsmøter der det diskuteres hvor høyt listen skal legges for en A, B, C, D og F. Kirsti Harg synes det er urovekkende at så mange studenter venter å få en A eller B. Karakteren C er veldig god. Studentene må ikke tro at de ikke kommer noen vei med denne karakteren, sier hun.



Sierpinski-trekanten

Tenker vi oss at vi i stedet for å kaste tre terninger, kaster fire terninger, nei fem eller kanskje seks eller gjerne enda flere, og summerer antall øyne så vil histogrammene (basert på 5000 forsøk, eller flere) ligne enda mer på *gausskurven*. Dette er også et eksempel på stokastisk lovmessighet.

Resultatet, som kan bevises matematisk, kalles *Sentralgrenseteoremet*. Etter den pythagoreske læresetning er dette det viktigste resultatet i matematikken, hveder mange. Sentralgrenseteoremet kan anvendes på mer interessante problemstillinger enn terningkast. At teoremet er blitt misbrukt finnes det nok av eksempler på, dessverre.

Et eksempel er vist i rammen på forrige side, og dreier seg om karakterfordelinger i forbindelse med den mye omtalte *kvalitetsreformen*[64].

Sierpinski-trekanten
er et virkelig slående eksempel på stokastisk lovmessighet. Den konstrueres på følgende måte.

Merk av tre hjørner A, B og C i en likesidet trekant og velg et tilfeldig hjørne som startpunkt x_0.

Velg deretter tilfeldig et av hjørnene A, B eller C; kast f.eks. en terning og hvis treningen viser 1 eller 2 velges A, viser den 3 eller 4 velges B og med 5 eller 6 øyne opp velges C.

Midt i mellom x_0 og det valgte hjørnet settes punktet x_1.

Fortsett på samme måte, men med x_1 som utgangspunkt i stedet for x_0 og lag punktet x_2. Med x_2 som nytt utgangspunkt lages x_3 og deretter x_4, x_5, . . . og så trylles frem den fraktale figuren som kalles Sierpinski-trekanten, etter oppdageren Waclaw Sierpinski.

[64] *The Myth of the Bell Curve av T. Goertzel & J. Fasing i tidsskriftet Humanity and Society, vol. 5 (1981) tar for seg en rekke eksempler på misforstått bruk av gausskurven opp gjennom tidene. Karaktersetting og IQ-testing er to av eksemplene som blir tatt opp.*

Til venstre er det vist en figur som består av ca 14 000 punkter. Hvis vi hadde kunnet tegne uendelig mange punkter ville hver av de tre trekantene som vi ser inne i den store trekanten vært en eksakt kopi av denne. Hver av disse ville i sin tur bestå av tre nye kopier, og så videre.[65]

Sierpinski-trekanten hører egentlig hjemme i den såkalte fraktalgeometrien[66] og ikke i sannsynlighetsregningen. Den kan også konstrueres uten bruk av den "tilfeldige algoritmen" som er skissert her.

Lykkemynt

Det er kanskje fortsatt noen som er villige til å følge resonnementet til flygerhelten Trygve Gran, i det han skal forsøke å bli førstemann som flyr over Nordsjøen:

> *"I kveldingen gik jeg ned til stranden, hvor smaa uskyldige bølger rullet indover den graa strand. Det var brudte dønninger disse skummende sjøer og indimellom laa store strekninger tørlagt. En stund blev jeg staaende paa frastand og betragte denne naturens leg, men saa fik jeg lyst til at være med i dansen og løp utover paa det sted hvor havet ligsom veg tilbake. Pludselig kom jeg til en liten fordypning hvor sand og sjø hvirvlet omkring. Jeg stak mine hænder ned i vannet og lod sandet passere mellem mine fingre. Da følte jeg med min hule haand en flat rund gjenstand. Det var et pengestykke – en ældgammel penny – en saakaldt lykke-penny fra dronninng Victorias tid. En 100 lap kunne ikke ha fremkaldt større glæde enn denne irrete kobbermynt. Mit barnslige selv jublet av fryd, for jeg tok dette fund som et varsel om at min færd skulle lykkes. Denne penny var engang tapt i havet og da mente jeg at chancerne var smaa for at den atter skulle gaa tilbunds. Ovetro, kalder man som regel slik tankegang – jeg kalder det beregning med sannsynligheter."*[67]

Om denne tankegangen er overtro eller ikke skal være usagt, men god sannsynlighetsregning er det i alle fall ikke.[68]

Dette til tross, det må tilføyes at Trygve Gran lykkedes i sitt dristige forsøk.

Det finnes mange andre eksempler på stokastisk lovmessighet.

Vi avslutter dette avsnittet med en påstand som kanskje kan sette et støkk i noen og enhver.

> *Det er praktisk talt sikkert at du som leser dette har, i løpet av denne dagen, åndet inn et av de luftmolekylene som slapp ut i Julius Cæsars siste åndedrag.*

Det påstår i alle fall Warren Weawer i sin underholdene og lettfattelige bok om sannsynlighetsregning; *Lady Luck – The Theory of Probability.*[69]

---

[65] Programmet som er brukt for å tegne denne trekanten er funnet på Internett. Men trekanten kan også tegnes med en lommeregner f.eks. av typen Texas TI-83. Se Texas Instruments, TI-83. Bruksanvisning. 1996, side 17-11.

[66] Ordet fraktal skyldes Benoit Mandelbrot, som er blitt beæret med Mandelbrotmengden, en av de vakreste fraktalene som er sett hittil. Det finnes avansert programvare for å tegne fraktaler, se f.eks. James Gleick's CHAOS: The SoftwareTM. + User Guide. 1991. En relativt enkel innføring i fraktalgeometrien er gitt av Bodil Branner: Komplekse dynamiske systemer. Fraktaler – oppstået ved iteration. Normat nr 3, 1989.

[67] Trygve Gran: Mellem himmel og jord. Gyldendal Norsk Forlag (1927).

[68] Følgende dialog er hentet fra Black Adder Goes Forth, Episode One, Captain Cook. (C) BBC TV – 1989. [Handlingen foregår i en skyttergrav i Frankrike under 1. verdenskrig.][Blackadder is sitting in a chair reading a book. A record is playing softly. Scratching noises are heard.] Blackadder: Baldrick, what are you doing out there? Baldrick: I'm carving something on this bullet sir. Blackadder: What are you carving? Baldrick: I'm carving "Baldrick", sir. Blackadder: Why? Baldrick: It's a cunning plan actually. Blackadder: Of course it is. Baldrick:You see, you know they say that somewhere there's a bullet with your name on it? Blackadder: Yes? Baldrick: Well, I thought if I owned the bullet with my name on it, I'd never get hit by it, 'cos I won't ever shoot myself. Blackadder: Oh, shame. Baldrick: And, the chances of there being two bullets with my name on them are very small indeed. Blackadder: That's not the only thing around here that's "very small indeed". Your brain for example, is so minute, Baldrick, that if a hungry cannibal cracked your head open there wouldn't be enough inside to cover a small water-biscuit.

*[69] Dover Publishing Company, 1982. Det er vel verdt å oppspore denne boken.
En annen bok som det er også verdt å oppspore og lese er Ekeland, I. Tilfeldighetenes spill. 2002, Pax Forlag. Den tar opp mye av det som vi har tatt opp i dette kapitlet, men med en ganske annerledes vinkling. Anmeldelsen av den franske (?) utgaven i tidsskriftet Science sier blant annet "Jeg må ikke avsløre spillet, like lite som jeg skulle gjøre det dersom jeg anmelder en kriminalroman. Det er en gripende fortelling. Jeg garanterer at dere ikke blir skuffet."*

→ Innholdsfortegnelse

DEL 4

Gjengivelse av artikler

→ Innholdsfortegnelse

En utvidelse av den klassiske reparatørmodellen

Magnus Strengehagen Klemetsdal

1. Innledning med problemstilling

Reparatørmodellen en velkjent problemstilling innen stokastisk modellering. Den klassiske modellen er en tidskontinuerlig Markovkjede hvor «maskinenes» levetider følger (uavhengige) identiske eksponensialfordelinger og reparasjonstidene også følger (uavhengige) identiske eksponensialfordelinger.

I den enkle og velkjente varianten er det slik at en maskin går til reparasjon straks den går i stykker, det vil si at hver maskin har et team av reparatører som trår til når det er nødvendig.

Her bli det studert en mer generell problemstilling. Systemet skal bestå av M maskiner, hvor det er tilstrekkelig at N maskiner virker ($N < M$) for at systemet skal være fullt operativt. Hvis det er flere enn N maskiner som virker vil noen stå «standby», for å settes inn når en av de som går svikter. Det skal være R reparatørteam tilgjengelig. Når $R < M$ vil det kunne oppstå en kø av maskiner som venter på reparasjon.

I tillegg til å presentere eksisterende teori for problemstillingen, når man antar at både levetider og reparasjonstider er eksponensialfordelte, er det laget et simuleringsprogram, som kan ta seg av vilkårlige antall maskiner (M) og reparatørteam (R), og vilkårlig krav til operativitet (N) samt vilkårlige leve- og reparasjonstider. Teorien danner grunnlaget for sammenligning av resultatene fra simuleringene.

Det er gjennomført simuleringer av systemet, både med eksponensialfordelte levetider og reparasjonstider, og med andre reparasjonstider enn eksponensialfordelinger.

Ett av målene er også å kunne si noe om i hvilken grad andre fordelinger gir andre resultater enn de som kommer ut av den klassiske modellen.

2. Oppsummering

2.1 Teori

Teoridelene presenterer relevant teori for å kunne beskrive problemet generelt. Teorien er videre brukt for å regne ut teoretiske verdier på et konkret eksempel. Det gir sammenlignings-grunnlag for resultatene fra simuleringen.

2.2 Simuleringer

For å simulere systemet er programmeringsspråket Python blitt brukt. Input til programmet er totalt antall maskiner (M), antall maskiner som må gå for at systemet skal være fullt operativt (N), antall reparatører tilgjengelig (R), samt hvilke levetidsfordelinger og reparasjonstidsfor-delinger som skal brukes. Output fra programmet er blant annet estimerte stasjonærsannsyn-ligheter og gjennomsnittlige overgangstider mellom systemets tilstander.

2.3 Levetidsfordelinger

Simuleringer er gjort med eksponensialfordelinger både på levetidene og reparasjonstidene. Dette var også tilfellet i de teoretiske beregningene. Simulering med de samme parameterne gir direkte sammenligningsgrunnlag.

Det er også gjort simuleringer med Erlangfordelte reparasjonstider *og* med sikre reparasjons-tider, alle med samme forventning som de valgte eksponensialfordelinger. Dette for å kunne sammenligne resultatene.

2.4 Konklusjon

Ved simulering med eksponensialfordelte leve- og reparasjonstider var det veldig god overensstemmelse mellom de teoretiske verdiene og de simulerte resultatene. Dette styrker også teorien om at programmet virker som det skal. Ved simulering med Erlangfordelte reparasjonstider, ble det avdekket en viss forskjell mellom disse verdiene og de teoretiske resultatene med eksponensialfordelte reparasjonstider.

Det konkluderes derfor med at fordelingen til reparasjonstidene har betydning for systemet, men i så beskjeden grad at man kan gjøre gode antagelser om et systemet med en teoretisk tilnærming.

Programmet kan med enkle endringer brukes til simuleringer med andre fordelinger.

3. Teori

3.1 Innledning

Systemet beskrives ved følgende stokastiske prosess:

X(t) = antall maskiner som virker, med utfallsrom $\Omega_X = \{0, 1, \dots, M\}$.

X(t) inneholder all informasjon om systemet (gitt at man kjenner M, N og R). Følgende avledede prosesser kan også være av interesse:

Y(t) = antall maskiner i drift, $\Omega_Y = \{0, 1, \dots, N)$ $= \min\{X(t), N\}$.

V(t) = antall maskiner i standby, $\Omega_V = \{0, 1, \dots, M - N\}$ $= \text{maks}\{X(t) - N, 0\}$.

U(t) = antall maskiner til reparasjon, $\Omega_U = \{0, 1, \dots, R\}$ $= \min\{M - X(t), R\}$.

W(t) = antall maskiner i reparasjons-kø, $\Omega_W = \{0, 1, \dots, M - R\}$ $= \text{maks}\{M - X(t) - R, 0\}$.

3.2 Eksponensialfordelinger, Erlangfordelinger og Gammafordelinger

Standardtilnærmingen til problemet er å anta at alle levetider og reparasjonstider er uavhengige eksponensialfordelte stokastiske variabler. Levetidene med feilraterate α og reparasjonstidene med reparasjonsrate β.

Eksponensialfordelinger

Parameteren som beskriver fordelingen blir ofte kalt raten, denne beskriver det forventede antall feil / reparasjonsjoner per tidsenhet. Er det snakk om levetider kalles den feilrate og for reparasjonstider kalles den reparasjonsrate.

Sannsynlighetstettheten til eksponensialfordelinger er: $f_{Exp(\alpha)}(t) = \begin{cases} 0 & for\, t < 0 \\ \alpha e^{-\alpha t} & for\, t > 0 \end{cases}$

Forventning: $\mu = \dfrac{1}{\alpha}$ Varians: $\sigma^2 = \dfrac{1}{\alpha^2}$

Forventningen kalles ofte Mean Time to Failure (MTTF) i en levetidsfordeling og Mean Time to Repair (MTTR) i en reparasjonstidsfordeling.

I tillegg er det slik at Eksponensialfordelingen «mangler hukommelse». Dette betyr at når en komponent har overlevd i t tidsenheter, er sannsynligheten for å overleve i x nye tidsenheter den samme som sannsynligheten for å overleve i x tidsenheter fra den var ny.

Gammafordelinger og Erlangfordelinger

En gammafordeling er en kontinuerlig sannsynlighetsfordeling med to parametere, α og n, der α, som i eksponensialfordelingen, kalles raten og n kalles formfaktoren (Walpole 1993, s. 167).

En kontinuerlig stokastisk variabel er gammafordelt hvis den har følgende sannsynlighets-tetthet:

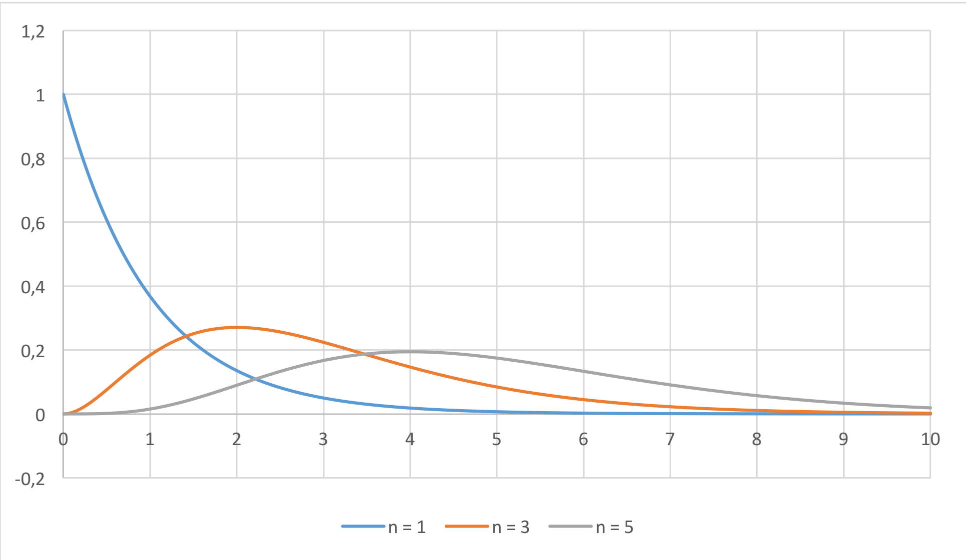
$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^n}{\Gamma(\alpha)} t^{n-1} e^{-t\alpha} & for\, t > 0 \\ 0 & ellers \end{cases}.$$

Hvor $\Gamma(\alpha)$ er *Gammafunksjonen*, definert som: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \qquad for\, \alpha > 0$.

Forventning: $\mu = \dfrac{n}{\alpha}$. Feilrate: $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{\alpha}{n}$. Varians: $\sigma^2 = \dfrac{n}{\alpha^2}$

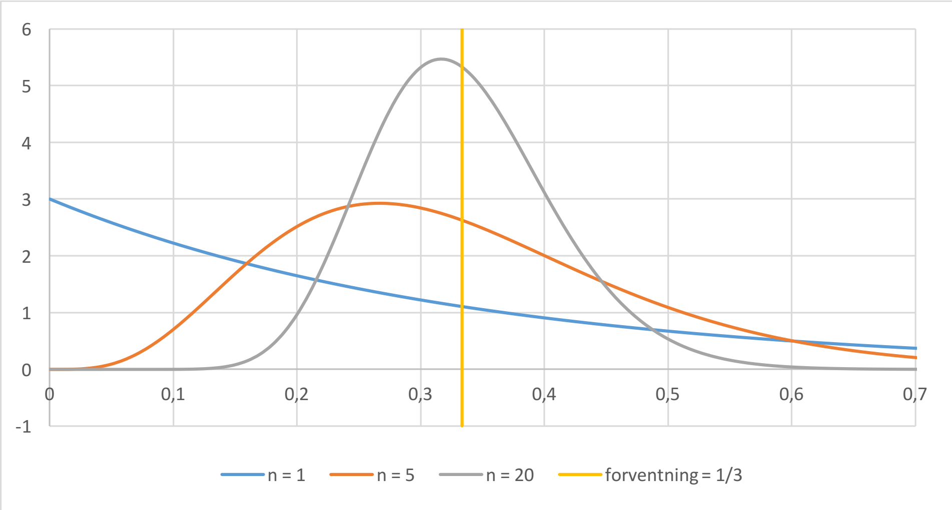
Erlangfordelinger er et spesialtilfelle av gammafordelinger hvor n er heltall og Eksponensial-fordelingen er en Erlangfordeling med $n = 1$.

Figuren under viser Erlangfordelinger med $\alpha = 1$ og forskjellige verdier for n.



Figur 1: Erlangfordeling med α = 1 og forskjellige verdier for *n*

Jo større verdi av *n*, jo mer vil fordelingen ligne på en normalfordeling. Dette vises enda tydeligere i figuren under, som for øvrig viser de fordelingene som blir brukt i simuleringene. Her er forventningen = 1/3 og n varierer.



Figur 2: Erlangfordeling med forventning = 1/3 og forskjellige verdier for *n*

Den praktiske betydningen av Erlangfordelte reparasjonstider i simuleringen, er at det er knyttet en større sikkerhet til reparasjonstidene enn ved eksponensialfordelte reparasjonstider. Dette ser man ved å studere sannsynlighetstetthetene over, og det er også lett å vise ved å studere variansen. (Her er det viktig å bemerke at forventningen r, skal være lik i de forskjellige tilfellene.)

Først ser vi på Eksponensialfordelingen:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\alpha^2}, \qquad r = \frac{1}{\alpha} \text{ og med } r = \frac{1}{3}, \text{ er } \alpha = 3.\ \sigma^2 = \frac{1}{3^2}, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{9}$$

Så ser vi på Erlangfordelingen med forventning lik 1/3 og $n = 20$:

$$\sigma^2 = \frac{n}{\alpha^2}, \qquad r = \frac{n}{\alpha} \text{ og med } r = \frac{1}{3}, \text{ er } n = 20 \text{ og } \alpha = 60.\ \sigma^2 = \frac{20}{60^2}, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{180}$$

Eller mer generelt: $\sigma^2_{n=n} = \sigma^2_{n=1} \cdot \frac{1}{n}$, ved samme forventning.

Dette betyr at ved økende n vil man få avtagende varians.

3.3 Prosessen X(t) er en fødsels- dødsprosess

System beskrives til enhver tid ved antall maskiner som virker ved den aktuelle tiden. Hvis det er slik at når det er j maskiner som virker så vil maskiner gå i stykker, eller «dø», eksponentielt med raten μ_j og maskiner vil bli reparert, eller bli «født», eksponentielt med raten λ_j. På den måten blir det da slik at hver gang det er j maskiner som virker vil tiden til neste maskin går i stykker (dør) være eksponensialfordelt med forventning $1/\mu_j$ og vil være uavhengig av tiden til neste reparasjon (fødsel), som er eksponensialfordelt med forventning $1/\lambda_j$.

Her kalles reparasjoner for fødsler fordi de øker populasjonen (antall maskiner som virker) med én, og maskiner som går i stykker dør fordi de reduserer populasjonen med én.

En slik prosess kalles en fødsels- dødsprosess. Parameterne λ_j og μ_j kalles henholdsvis fødselsratene og dødsratene. På den måten blir en fødsels- dødsprosess en Markovkjede i kontinuerlig tid med tilstandene $\{0, 1, \ldots\}$ hvor overgang fra tilstand j går enten til $j + 1$ eller $j - 1$ og kun dette. (Her er populasjonens øvre grense begrenset til antall maskiner M, og *tilstandsrommet* er $\Omega_X = \{0, 1, \ldots, M\}$) (Ross, 2014, s. 360).

Oppholdstider

Prosessen går inn i tilstand j fra enten $j + 1$ eller $j - 1$, og går ut av tilstand j til enten $j + 1$ eller til $j - 1$. Maskinene som går blir ødelagt med raten μ_j og maskinene til reparasjon blir reparert med raten λ_j. Systemet endrer tilstand enten når en maskin blir reparert eller når en maskin blir ødelagt. Oppholdstiden i en tilstand sees på minimum av to uavhengige eksponensialfordelinger. (Eller som levetiden til en seriekobling med to komponenter.)

Oppholdstiden i tilstand j, $T_{j,}$, er da eksponensialfordelt med følgende forventning:

$$E[T_j] = \frac{1}{\mu_j + \lambda_j}.$$

Sammenhengen mellom fødselsratene og dødsratene og overgangsratene mellom tilstandene, med tilhørende sannsynligheter er:

Fødsels og dødsratene er:

$$\lambda_i = \min\{M - x, R\} \cdot \beta \qquad \mu_i = \min\{x, N\} \cdot \alpha \text{ for } 0 \le x \le M.$$

Sannsynligheten for å gå ett skritt opp og sannsynligheten for å gå ett skritt ned er:

$$\begin{aligned} P_{i,i+1} &= \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, \qquad 0 \le i < M \\ P_{i,i-1} &= \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, \qquad 0 < i \le M \end{aligned}$$

(Bele, 2015, s. 20)

Overgangssannsynligheter

$P_{ij}(t)$ er sannsynligheten for at et system, som er i tilstand i, er i tilstand j t tidsenheter senere. Disse kalles *overgangssannsynligheter* i en tidskontinuerlig Markovkjede.

Kolmogorovs forlengs differensialligninger for fødsels-dødsprosesser

Overgangssannsynlighetene er gitt fra et system av lineære førsteordens differensialligninger som kalles Kolmogorovs forlengs-ligninger. Ligningene for den generelle fødsels- dødsprosessen ser slik ut (Ross, 2014, s.373):

$$P'_{i0}(t) = \mu_1 P_{i1}(t) - \lambda_0 P_{i0}(t)$$

$$P'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} P_{i\,j-1}(t) + \mu_{j+1} P_{i\,j+1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) P_{ij}(t)$$

Siden starttilstanden, i, alltid er den samme (alltid = M) vil det noe forenklet kunne skrives som:

$$P'_j(t) = \lambda_{j-1}P_{j-1}(t) + \mu_{j+1}P_{j+1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)P_j(t) \text{ for } j = 0,1,2,\ldots,\mathrm{M}$$

Dette ligningssystemet kan skrives på matriseform og dermed også løses ved hjelp av egen-vektor- egenverdi-metoden (Braun, 1975, s. 309).

Stasjonærsannsynligheter

Som for aperiodiske Markovkjeder i diskret tid konvergerer sannsynligheten for at en endelig Markovkjede i kontinuerlig tid vil være i tilstand j ved tiden t, når $t \to \infty$, mot en grenseverdi. Grenseverdien er uavhengig av starttilstanden (Ross, 2014, s. 374). Det vil si at: $P_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)$

.

Stasjonærsannsynligheten P_j er lik andelen tid systemet tilbringer i tilstand j i det lange løp. Siden $P_j(t)$ konvergerer er $\lim_{t\to\infty} P_j'(t) = 0$. Sammen med $\sum_j P_j = 1$ gir Kolmogorovs for-lengsligninger disse ligningene for stasjonærsannsynlighetene:

$$\lambda_0 P_0 - \mu_1 P_1 = 0$$

$$\lambda_{j-1}P_{j-1} + \mu_{j+1}P_{j+1} - (\lambda_j + \mu_j)P_j = 0, \text{ for } j = 0,1,2,\ldots,\mathrm{M}.$$

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_M = 1$$

Disse ligningene kan løses rekursivt. Løsningen er (Ross[1]):

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{M} \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_j}} \quad \text{og} \quad P_j = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_j\left(1 + \sum_{j=1}^{M} \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_j}\right)}, \quad \textit{for } j = 1,2,\ldots,\mathrm{M}.$$

Forventede overgangstider mellom tilstandene

I dette avsnittet ser vi på de forventede overgangstidene mellom tilstandene for en generell fødsels- dødsprosess på tilstandsrommet Ω = {0, 1, 2, …, M}.

For k, $j \in \Omega$ defineres $m_{k,j}$ som: *Forventet tid fra prosessen går inn i tilstand k og til den entrer tilstand j for første gang etter dette.* Vi definerer også $m_{k,k} = 0$.

k > j: forventede tider nedover i prosessen

Fra tilstand M kan prosessen kun gå til tilstand M – 1: $m_{M,M-1} = \dfrac{1}{\mu_M}$.

Basert på en *første-stegs-analyse* kan vi stille opp disse ligningene:

$$m_{k,k-1} = \frac{1}{\mu_k + \lambda_k} + \frac{\lambda_k}{\mu_k + \lambda_k} \cdot m_{k+1,k-1} + \frac{\mu_k}{\mu_k + \lambda_k} \cdot m_{k-1,k-1}$$

[1] Ligning 6.20 s. 376, men med øvre grense M.

Forventet tid fra tilstand k til $k-1$ er forventet oppholdstid i tilstand k, pluss $P_{k,k+1}$ ganget med forventet tid fra $k+1$ til $k-1$, og pluss $P_{k,k\text{-}1}$ ganget med forventet tid fra $k-1$ til $k-1$. Men her er altså $m_{k-1,k-1}=0$.

Videre har vi:

$$m_{k+1,k-1}=m_{k+1,k}+m_{k,k-1}$$

Disse ligningene gir så:

$$m_{k,k-1}=\frac{1}{\mu_k+\lambda_k}+\frac{\lambda_k}{\mu_k+\lambda_k}\cdot\left(m_{k+1,k}+m_{k,k-1}\right)$$

$$m_{k,k-1}\cdot(\mu_k+\lambda_k)=1+\lambda_k\cdot\left(m_{k+1,k}+m_{k,k-1}\right)$$

$$m_{k,k-1}\cdot(\mu_k+\lambda_k-\lambda_k)=1+\lambda_k\cdot m_{k+1,k}$$

Det vil si:

$$m_{k,k-1}=\frac{1}{\mu_k}\left(1+\lambda_k\cdot m_{k+1,k}\right).$$

Dette er den generelle differensligningen for forventete overgangstider fra tilstand k til $k-1$. Initialbetingelsen er: $m_{M,M-1}=\dfrac{1}{\mu_M}$.

Deretter har vi:

$$m_{M,M-2}=m_{M,M-1}+m_{M-1,M-2}$$

$$m_{M,M-3}=m_{M,M-1}+m_{M-1,M-2}+m_{M-2,M-3}$$

$$m_{M,0}=m_{M,M-1}+\ldots+m_{1,0}$$

$k<j$: forventede tider oppover i prosessen

Vi kan bruke samme sammenheng og samme antagelse om $m_{k,k}$ for å finne $m_{k,k+1}$.

$$m_{k,k+1}=\frac{1}{\mu_k+\lambda_k}+\frac{\mu_k}{\mu_k+\lambda_k}\cdot m_{k-1,k+1}$$

$$m_{k-1,k+1}=m_{k-1,k}+m_{k,k+1}$$

$$m_{k,k+1}=\frac{1}{\mu_k+\lambda_k}+\frac{\mu_k}{\mu_k+\lambda_k}\cdot\left(m_{k-1,k}+m_{k,k+1}\right)$$

$$m_{k,k+1}=\frac{1}{\lambda_k}\left(1+\mu_k\cdot m_{k-1,k}\right)$$

Dette er den generelle differensligningen for forventet overgangstid fra tilstand k til $k+1$.

Initialbetingelsen er: $m_{0,1} = \frac{1}{\lambda_0}$.

Nå kan alle de forventede overgangstider mellom to vilkårlige tilstander i denne prosessen bestemmes.

3.4 Eksempel M = 5, N = 3, R = 2

Som et eksempel ser vi på tilfellet at M=5, N=3 og R=2. Altså et system som består av 5 maskiner hvor 3 må gå for at systemet skal være operativt og det er 2 reparatører tilgjengelig. Det er med andre ord maks tre maskiner som går av gangen, men selv om systemet er avhengig av tre maskiner for å levere tilfredsstillende, går det maskiner helt frem til det er 0 maskiner som virker. Maskinenes levetid er uavhengige eksponensialfordelt med parameter α, og reparasjonstiden er uavhengig eksponensialfordelt med parameter β. Denne prosessen, eller mer presist denne prosessens tilstander, kan beskrives som en tidskontinuerlig Markovkjede. Overgangs-strukturen til denne prosessen vises i figur 3.

Stasjonærsannsynlighetene

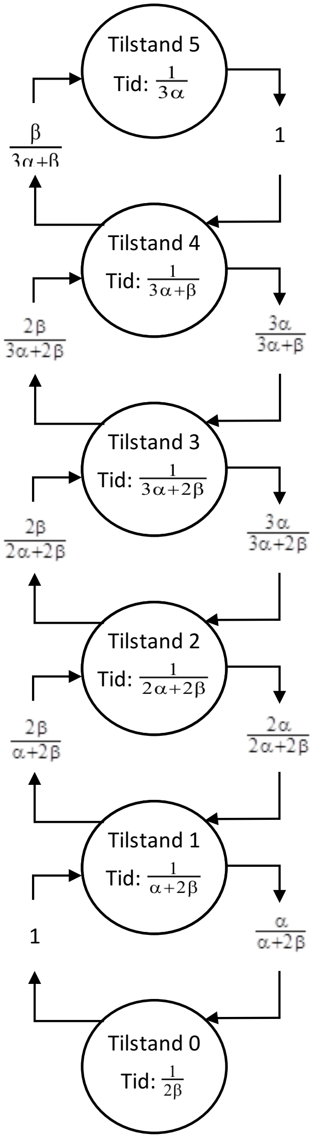
Fødsels- og dødsratene er gitt i tabell 1:

Tabell 1: Tilstandene og deres levetids- og reparasjonsrater

Virker (*j*)	Til rep.	Går	λ_j	μ_j
5	0	3	0	3α
4	1	3	β	3α
3	2	3	2β	3α
2	2	2	2β	2α
1	2	1	2β	α
0	2	0	2β	0

Videre kan vi stille opp Kolmogorovs forlengsligninger for dette tilfellet (for enkelhets skyld er (t) ikke tatt med her):

$$P'_0 = -2\beta P_0 + \alpha P_1$$
$$P'_1 = 2\beta P_0 - (2\beta + \alpha)P_1 + 2\alpha P_2$$
$$P'_2 = 2\beta P_1 - (2\beta + 2\alpha)P_2 + 3\alpha P_3$$
$$P'_3 = 2\beta P_2 - (2\beta + 3\alpha)P_3 + 3\alpha P_4$$
$$P'_4 = 2\beta P_3 - (\beta + 3\alpha)P_4 + 3\alpha P_5$$
$$P'_5 = \beta P_4 - 3\alpha P_5$$



Figur 3: Overgangsstruktur med forventet tid i tilstandene og overgangssannsynligheter

Løsning av differensialligningene

Differensialligningene er løst ved hjelp av egenverdi- egenvektorer.

Kalkulatoren Texas TI-89 finner egenverdier og egenvektorer med $\alpha = 1$ og med forskjellige verdier for β.

Videre i eksempelet ser vi på tilfellet der $\beta = 3$. (TI-89 finner normerte egenvektorer, altså med lengde lik 1).

Tabell 2: Egenverdier med tilhørende egenvektorer og koeffisienter for $\alpha = 1$, $\beta = 3$ og $P_5(0) = 1$

Egenverdier	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6
	-14.781	-10.307	-7.081	-4.599	0.000	-2.231
Egenvektorer	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
	0.013	-0.071	-0.110	-0.109	0.009	0.068
	-0.118	0.306	0.119	-0.153	0.055	0.258
	0.420	-0.293	0.326	0.144	0.164	0.410
	-0.712	-0.387	-0.139	0.469	0.328	0.272
	0.533	0.755	-0.742	0.400	0.657	-0.206
	-0.136	-0.310	0.545	-0.751	0.657	-0.803
Koeffisienter	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
	-0.062	-0.111	0.231	-0.315	0.535	-0.304

Det interessante å legge merke til her er at alle egenverdiene er *reelle*. (Slik er det sannsynligvis alltid) Alle bortsett fra *en* er negative. Den ene, som ikke er negativ, er lik null, og slik er det alltid.

Løsningen kan nå skrives på vektorform som:

$$\mathbf{P}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{t\cdot\xi_1} + c_2\mathbf{v}_2 e^{t\cdot\xi_2} + c_3\mathbf{v}_3 e^{t\cdot\xi_3} + c_4\mathbf{v}_4 e^{t\cdot\xi_4} + c_5\mathbf{v}_5 e^{t\cdot\xi_5} + c_6\mathbf{v}_6 e^{t\cdot\xi_6}$$

Koeffisientene c_j, $1 \le j \le 6$, er avhengige av initialbetingelsen.

I og med at alle maskinene skal virke ved $t = 0$, er:

$$P_5(0) = 1 \text{ og } P_4(0) = P_3(0) = P_2(0) = P_1(0) = P_0(0) = 0.$$

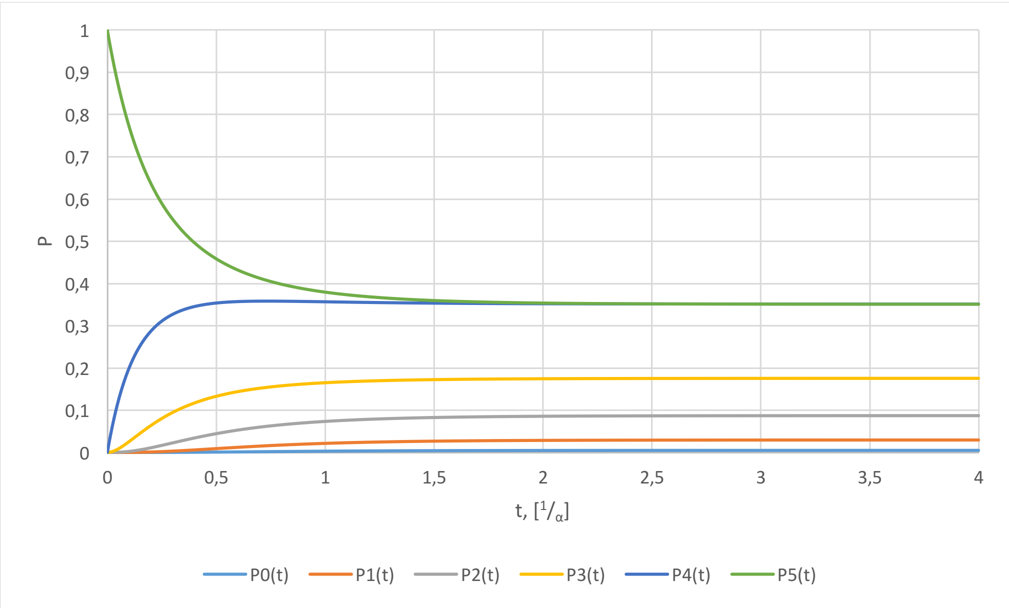
Dette gir et ligningssett med 6 ligninger og 6 ukjente.

Løsningen er:

$$\begin{bmatrix} P_0(t) \\ P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \\ P_5(t) \end{bmatrix} = (-0.062)\cdot\begin{bmatrix} 0.013 \\ -0.118 \\ 0.420 \\ -0.712 \\ 0.533 \\ -0.136 \end{bmatrix}\cdot e^{-14.781\cdot t} + (-0.111)\cdot\begin{bmatrix} -0.071 \\ 0.306 \\ -0.293 \\ -0.387 \\ 0.755 \\ -0.310 \end{bmatrix}\cdot e^{-10.307\cdot t} + 0.231\cdot\begin{bmatrix} -0.110 \\ 0.119 \\ 0.326 \\ -0.139 \\ -0.742 \\ 0.545 \end{bmatrix}\cdot e^{-7.081\cdot t}$$

$$+(-0.315)\cdot\begin{bmatrix} -0.109 \\ -0.153 \\ 0.144 \\ 0.469 \\ 0.400 \\ -0.751 \end{bmatrix}\cdot e^{-4.599\cdot t} + 0.535\cdot\begin{bmatrix} 0.009 \\ 0.055 \\ 0.164 \\ 0.328 \\ 0.657 \\ 0.657 \end{bmatrix} + (-0.304)\cdot\begin{bmatrix} 0.068 \\ 0.258 \\ 0.410 \\ 0.272 \\ -0.206 \\ -0.803 \end{bmatrix}\cdot e^{-2.231\cdot t}$$

Under er løsningene grafisk fremstilt med $^1/_\alpha$ som benevning. Det ble også tydelig at sannsynlighetene konvergerer.



Figur 4: $P_j(t)$, β = 3

Stasjonær sannsynlighetene kan nå bestemmes som: $P_j = \lim_{t\to\infty} P_j(t)$, eller fra ligningene fra Ross.

Siden egenverdiene er ≤ 0 konvergerer $P_j(t)$ når $t \to \infty$. Dette ga, for α = 1 og β= 3, følgende stasjonærsannsynligheter:

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{bmatrix} = 0.535 \cdot \begin{bmatrix} 0.009 \\ 0.055 \\ 0.164 \\ 0.328 \\ 0.657 \\ 0.657 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.029 \\ 0.088 \\ 0.175 \\ 0.351 \\ 0.351 \end{bmatrix}.$$

Systemet er, i det lange løp, operativt i 87.7 % av tiden, $P_3 + P_4 + P_5 = 0.877$.

Overgangstider

De forventede overgangstidene opp og ned i systemet ble funnet ved å løse ligningene:

$$m_{k,k-1} = \frac{1}{\mu_k}\left(1 + \lambda_k \cdot m_{k+1,k}\right) \qquad og \qquad m_{k,k+1} = \frac{1}{\lambda_k}\left(1 + \mu_k \cdot m_{k-1,k}\right)$$

Videre er det slik at:

$$m_{k,k+n} = m_{k,k+1} + m_{k+1,k+2} \ldots + m_{k+n-1,k+n}$$

Resultatene, satt opp i matriser ser slik ut for hhv. β = 2 og β = 3.

Tabell 3: Forventede overgangstider mellom tilstandene, β = 2

		FRA					
		5	4	3	2	1	0
TIL	5	0.000	1.332	1.887	2.293	2.605	2.855
	4	0.333	0.000	0.555	0.961	1.273	1.523
	3	0.889	0.556	0.000	0.406	0.719	0.969
	2	**1.963**	1.630	1.074	0.000	0.313	0.563
	1	4.611	4.278	3.722	2.648	0.000	0.250
	0	16.204	15.870	15.315	14.241	11.593	0.000

Tabell 4: Forventede overgangstider mellom tilstandene, β = 3

		FRA					
		5	4	3	2	1	0
TIL	5	0.000	0.616	0.898	1.130	1.324	1.491
	4	0.333	0.000	0.282	0.514	0.708	0.875
	3	1.000	0.667	0.000	0.231	0.426	0.593
	2	**2.667**	2.333	1.667	0.000	0.194	0.361
	1	8.167	7.833	7.167	5.500	0.000	0.167
	0	42.167	41.833	41.167	39.500	34.000	0.000

Det som er spesielt interessant å trekke frem er m_{52}, altså tiden fra systemet er fullt operativt, at X(t) = 5, og til systemet ikke lenger leverer tilfredsstillende, at X(t) < N. Dette finner vi ved å se på tiden fra 5 til 2 (N = 3) som er 1,963· $^1/_\alpha$ for β = 2 og 2,667 ·$^1/_\alpha$ for β = 3.

4. Simuleringer

Simuleringene er gjennomført med de samme verdiene på M, N og K som i eksemplet i avsnitt 3.5, dvs. M = 5, N = 3 og R = 2.

4.1 Eksponensialfordelinger

Stasjonærsannsynlighetene

Stasjonærsannsynlighetene er beregnet ved å studere total andel av tiden tilbrakt i hver tilstand. I disse simuleringene er α = 1, det vil også si at tidsenheten er 1/α. Det er gjort simuleringer med β = 2 og β = 3, med eksponensialfordelte levetider. Dvs. at MTTR = hhv 1/2 og 1/3. Dette betyr at forventet reparasjonstid er hhv. 1/2-parten, og 1/3-parten av forventet levetid.

Det er gjort ti simuleringer med β = 2 og tjue simuleringer med β = 3 alle med én million overganger.

Under vises resultatene fra simuleringene med gjennomsnittsverdiene fra alle simuleringene med tilhørende standardavvik og konfidensintervall. Både gjennomsnittet og standardavviket er beregnet med Excels innebygde funksjoner.

Tabell 5: Simulerte stasjonærsannsynligheter med eksponensialfordelte leve og reparasjonstider, α = 1, β = 2

β = 2

Tilstand (j)	Gjennomsnitt	Standardavvik	95% konf.int		Teoretisk
0	0.02105	0.00022	0.02090	0.02121	0.02111
1	0.08448	0.00036	0.08422	0.08474	0.08444
2	0.16895	0.00019	0.16882	0.16909	0.16888
3	0.22515	0.00025	0.22497	0.22533	0.22518
4	0.30019	0.00054	0.29980	0.30058	0.30023
5	0.20017	0.00033	0.19993	0.20041	0.20016

Tabell 6: Simulerte stasjonærsannsynligheter med eksponensialfordelte leve og reparasjonstider, α = 1, β = 3

β = 3

Tilstand (j)	Gjennomsnitt	Standardavvik	95% konf.int		Teoretisk
0	0.00488	0.00011	0.00482	0.00493	0.00488
1	0.02921	0.00017	0.02913	0.02929	0.02927
2	0.08769	0.00028	0.08756	0.08782	0.08780
3	0.17562	0.00053	0.17537	0.17586	0.17561
4	0.35132	0.00042	0.35113	0.35152	0.35122
5	0.35128	0.00080	0.35091	0.35166	0.35122

Overgangstider

Overgangstidene er beregnet ved å se på hvor lang tid det i gjennom snitt tar fra systemet går inn i en tilstand til det går til $j + 1$ og $j - 1$. Også her er gjennomsnittet fra simuleringene vist med tilhørende standardavvik og konfidensintervall. De teoretiske verdiene er med for sammenligning.

Tabell 7: Simulerte overgangstider med eksponensialfordelte leve- og reparasjonstider, α = 1, β = 2

β = 2

m_{kj}	Gjennomsnitt	Standardavvik	95% konf.int		Teoretisk
m_{10}	11.61603	0.10021	11.54434	11.68771	11.59259
m_{21}	2.64496	0.01293	2.63572	2.65421	2.64815
m_{32}	1.07426	0.00152	1.07318	1.07535	1.07407
m_{43}	0.55565	0.00117	0.55481	0.55649	0.55556
m_{54}	0.33366	0.00078	0.33310	0.33422	0.33333
m_{01}	0.24983	0.00270	0.24790	0.25176	0.25000
m_{12}	0.31208	0.00090	0.31143	0.31273	0.31250
m_{23}	0.40644	0.00067	0.40596	0.40692	0.40625
m_{34}	0.55485	0.00096	0.55416	0.55553	0.55469
m_{45}	1.33319	0.00375	1.33051	1.33588	1.33203

Tabell 8: Simulerte overgangstider med eksponensialfordelte leve- og reparasjonstider, α = 1, β = 3

β = 3

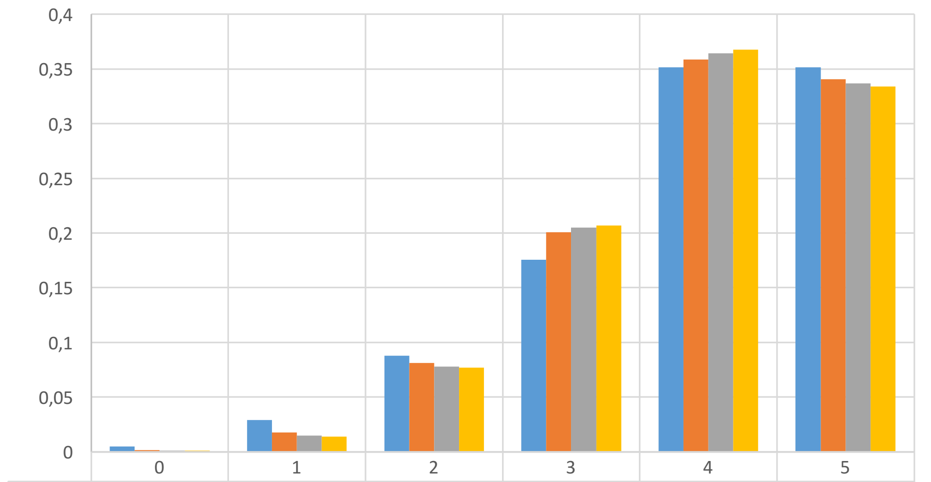
m_{kj}	Gjennomsnitt	Standardavvik	95% konf.int		Teoretisk
m_{10}	33.96917	0.46075	33.75353	34.18481	34.00000
m_{21}	5.51464	0.02945	5.50085	5.52842	5.50000
m_{32}	1.66928	0.00733	1.66585	1.67271	1.66667
m_{43}	0.66674	0.00184	0.66587	0.66760	0.66667
m_{54}	0.33319	0.00054	0.33294	0.33345	0.33333
m_{01}	0.16643	0.00238	0.16532	0.16755	0.16667
m_{12}	0.19463	0.00097	0.19417	0.19508	0.19444
m_{23}	0.23147	0.00097	0.23102	0.23193	0.23148
m_{34}	0.28221	0.00080	0.28184	0.28259	0.28241
m_{45}	0.61532	0.00202	0.61437	0.61626	0.61574

Her er det verdt å merke seg at den estimerte verdien for m_{21}, ved β = 3, finner man ikke igjen konfidensintervallet. Men det er nå slik som kan skje.

4.2 Eksponensialfordelte levetider, Erlangfordelte reparasjonstider

For at resultatene fra disse simuleringene skal være sammenlignbare med de tidligere simuleringene er forventet reparasjonstid (r) den samme. Siden n skal variere betyr dette at β også må forandres. Ny verdi er: $\beta = n/r$.

Det er gjort 20 simuleringer med én million overganger.



	0	1	2	3	4	5
n = 1	0,00487504	0,029213057	0,087690324	0,175615824	0,351322607	0,351283148
n = 5	0,001599345	0,017506795	0,080948045	0,200624283	0,358727599	0,340593934
n = 20	0,001106811	0,014828916	0,078054952	0,204863796	0,364306018	0,336839507
n → ∞	0,000986824	0,013860916	0,076728952	0,206878601	0,36741227	0,334132437

Figur 5: Gjennomsnittlig tid i tilstand ved eksponensialfordelt levetid og Erlangfordelte reparasjonstider med forventning = 1/3 og varierende *n*

Figuren viser en grafisk fremstilling av stasjonærsannsynlighetene til de forskjellige tilstandene ved forskjellige verdier av n. For å simulere at $n \to \infty$ har er det lagt inn sikker reparasjonstid i programmeringsalgoritmen.

Under vises 95% konfidensintervallene for de simulerte stasjonærsannsynlighetene. Verdiene fra det teoretiske tilfellet med rene eksponensialfordelinger er vist til høyre for sammenligning.

Tabell 9: 95% konfidensintervall fra simuleringer med forventning = 1/3 og varierende n

Tilstand (j)	$n = 5$		$n = 20$		$n \to \infty$		**Teoretisk exp. /exp.**
0	0.00158	0.00162	0.00109	0.00112	0.00098	0.00100	0.00488
1	0.01744	0.01758	0.01477	0.01489	0.01378	0.01394	0.02927
2	0.08078	0.08111	0.07789	0.07822	0.07658	0.07688	0.08780
3	0.20041	0.20084	0.20467	0.20506	0.20671	0.20704	0.17561
4	0.35850	0.35896	0.36412	0.36449	0.36717	0.36765	0.35122
5	0.34023	0.34096	0.33662	0.33706	0.33385	0.33441	0.35122

Det man umiddelbart ser er at Erlangfordelte reparasjonstider *har* innvirkning på resultatet. De teoretiske verdiene fra tilfellet med rene eksponensialfordelinger er ikke å finne igjen i et 95% konfidensintervallet til de simulerte stasjonærsannsynlighetene der $n \neq 1$. Forskjellen er også økende ved økende n.

4.3 Drøfting

Eksponensialfordelte leve- og reparasjonstider

Ved eksponensialfordelte leve- *og* reparasjonstider var det god overenstemmelse mellom de teoretiske og de simulerte resultatene, både når det gjaldt stasjonærsannsynligheter og forventede overgangstider mellom tilstandene. Alle verdiene, unntatt *en*, lå innenfor et tosidig 95% konfidensintervall. Dette var ikke uventet, og jeg ser på dette som en bekreftelse på at simuleringsprogrammet fungerer som det skal.

Hvor fort systemet blir ikke-operativt er av interesse og, ikke uventet, er det slik til at systemet tilbringer mer tid i operativ tilsand og bruker lengre tid fra fullt operativt til ikke-operativt ved høyere verdi for β (som betyr lavere forventet reparasjonstid).

Eksponensialfordelte levetider, Erlangfordelte reparasjonstider

Det som er mer interessant å se på er simuleringene med Erlangfordelte reparasjonstider. Her var det forskjell, både på stasjonærsannsynlighetene og de forventede overgangstidene sammenlignet med de teoretiske verdiene med rene eksponensialfordelinger. Det som da er nærliggende er å spørre seg er *hvorfor* dette er tilfellet? Det at variansen minker ved økende n trenger ikke i seg selv å påvirke resultatet i nevneverdig grad. Det betyr bare at det er mindre usikkerhet knyttet til reparasjonstidene, men gjennomsnittet av disse burde allikevel ligge i nærheten av forventningen. Forventningen er jo uansett lik, det var også en forutsetning.

Den største prosentvise forskjellen mellom stasjonærsannsynlighetene ved varierende n finner man i tilstand 0. Her er det kun reparasjonstiden som påvirker systemet til å endre tilstand og derfor er det også naturlig at det er denne tilstanden som blir mest påvirket når dette først er tilfellet. Systemet tilbrakte mindre tid ved økende n i tilstand 0, 1, 2 og 5, mens det tilbrakte mer tid i tilstand 3 og 4. Totalt utgjorde det at systemet tilbringer mer tid i tilstand 5, 4 og 3 ved økende n, altså det fører til en økt operativitet i dette eksempelet. Samtidig ser vi at forventet tid fra tilstand 5 til 2 minker med økende n (se tabell 10). Jeg vil allikevel argumentere for at systemet påvirkes lite, spesielt i de operative tilstandene, av at reparasjonstidene er annerledes fordelt enn eksponentielt. Det vil med andre ord kunne gjøres relativt presise antagelser om operativiteten til et system gjennom teoretisk tilnærming hvis man kjenner forventet leve- og reparasjonstid og antar at disse er eksponensialfordelt.

Tabell 10: Operativitet ved varierende n

	$n = 1$	$n = 5$	$n = 20$	$n \to \infty$
$P_5 + P_4 + P_3$	0.878	0.900	0.906	0.908
m_{52}	2.669	2.479	2.450	2.433

Konklusjon

Denne oppgaven har tatt for seg et system bestående av M maskiner hvor N må gå og det er R reparatører tilgjengelig. Problemet er beskrevet teoretisk, med eksponensialfordelte levetider og reparasjonstider. Videre er teorien brukt i et eksempel. Verdiene fra eksempelet danner sammenligningsgrunnlaget for resultatene fra simuleringene. Det er gjennomført simuleringer med eksponensialfordelte levetider og med eksponensialfordelte, Erlangfordelte og faste reparasjonstider.

Det var god overensstemmelse mellom de teoretiske verdiene og resultatet fra simuleringene med eksponensialfordelte leve- og reparasjonstider. Dette styrker teorien om at simuleringsprogrammet virker tilfredsstillende.

Videre viste det seg at resultatene fra simuleringene med Erlangfordelte og faste reparasjonstider var forskjellige fra de teoretiske verdiene. Dette betyr at det har innvirkning på systemet at reparasjonstidene er annerledes fordelt enn eksponensielt. Forskjellen er imidlertid ikke større enn at det går an å gjøre fornuftige antagelser om systemets operativitet med en teoretisk tilnærming med eksponensialfordelte leve- og reparasjonstider.

Litteratur

Braun, Martin. *Differential Equations and Their Applications, 2nd edition.*
New York: Springer Verlag. 1978.

Walpole, Ronald E and Myers, Raymond H. *Probability and Statistics for Engineers and Scientists, fifth edition.* New Jersey: Englewood Cliffs. 1993.

Ross, Sheldon M. *Introduction to probability models 11th edition*.
Los Angeles Ca.: Academic Press. 2014.

Berle, Christina. *Bacheloroppgave ved sjøkrigsskolen: Reparatørmodellen*
Bergen: Sjøkrigsskolen. 2015.

→ Innholdsfortegnelse

"Navigare necesse est, vivere non necesse"

Roar Espevik

Evidently, a quotation from Pompey(56bc), who used it to urge his sailors on when they refused to set sail on a stormy sea, to bring grain from Africa to a starving Rome. A task familiar to every navy officer, thus duty to the society when the situation demands it is more vital than own survival. It means, literally, "It is necessary to sail, it is not necessary to live." Meaning, it is necessary to set off, even if you are not at all sure that you are ever going to arrive.

And it is more "Necesse" than ever that we set sail within the academic world. Thus our picture on the front page, the possible monster, Nessie of Loch Ness symbols our quest for knowledge within the Sea Military domain. What is truth and with what kind of certainty can we claim to know the truth, being a monster or Naval warfare. It is an ongoing process that makes us wiser but not certain. The Royal Norwegian Naval Academy dates back 200 years and our intention is to put our competence or sometimes even lack of it into the open for arguments. This is a three folded wish; to invite to debate/reflection and/or present competent arguments and/or publish knowledge gained through peer reviewed research. In short we have a deep desire to launch through "Necesse" our latest academic thoughts, research and efforts concerning anything that is important to a Navy officer. "Necesse" will entail, scientific articles, being especially brilliant bachelor papers written by cadets or works of scholars within own Academy or others writing within the navy officer sphere.

ISBN 978-82-93550-03-7